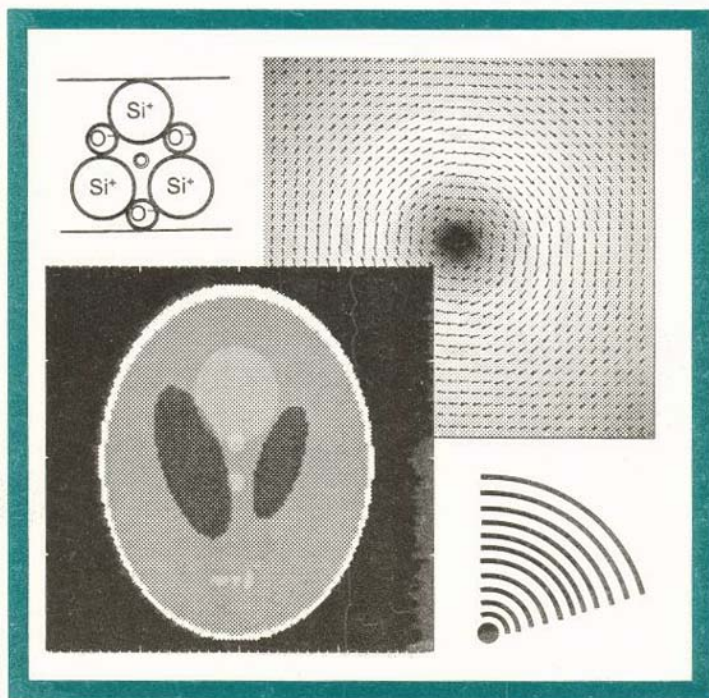


М.Н.Рычагов

Ультразвуковая медицинская
визуализация:
B-сканирование и
цифровая реконструкция



Москва 2001

~~Министерство образования Российской Федерации~~
~~Московский государственный институт электронной техники~~
~~(Технический университет)~~

М.Н.Рычагов

**Ультразвуковая медицинская
визуализация: *B*-сканирование
и цифровая реконструкция**

Учебное пособие

Утверждено редакционно-издательским советом института

Москва 2001

ББК 22.32
Р93
УДК 534.2+534.7:61

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук *А.С.Кравчук*;
канд. физ.-мат. наук *О.А.Сапожников*

Рычагов М.Н.

Р93 Ультразвуковая медицинская визуализация: В-сканирование и цифровая реконструкция: Уч. пособие. - М.: МИЭТ, 2001. - 140 с.: ил.
ISBN 5-7256-0290-7

Рассмотрены физические основы и технические принципы конструирования современных и перспективных систем медицинской акустической интроскопии. Представлены необходимые сведения об основных уравнениях физической акустики, а также по технике акустических измерений и медицинского ультразвука. Описано функционирование ультразвуковых В-сканеров. Особое внимание уделено рассмотрению математических методов решения обратных задач рассеяния томографического типа, составляющих основу конструирования устройств акустической томографии.

Предназначено для студентов и преподавателей технических университетов.

Учебное пособие

Рычагов Михаил Николаевич

Ультразвуковая медицинская визуализация: В-сканирование и цифровая реконструкция

Редактор *Е.Г.Кузнецова*. Выпускающий редактор *С.В.Козинцева*. Технический редактор *Е.Н.Романова*. Корректор *Л.Г.Лосякова*

ЛР № 020516 от 12.05.97 Подписано в печать с оригинала-макета 30.11.2001.
Формат 60×84 1/16 Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,12.
Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 150 экз. Заказ 298.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.
103498, Москва, МИЭТ.

ISBN 5-7256-0290-7

© МИЭТ, 2001

Введение

Настоящее пособие подготовлено для студентов, обучающихся по специальности 19.05 - биотехнические и медицинские аппараты и системы на кафедре биомедицинских систем Московского государственного института электронной техники.

Пособие охватывает два взаимосвязанных раздела курса «Ультразвуковая медицинская визуализация»: стандартные методы формирования ультразвуковых изображений, получившие широкое распространение в медицинской практике, и теоретические основы количественной акустической интроскопии томографического типа. В его первой половине (главы 1 - 4) излагаются физические основы и технические принципы конструирования ультразвуковых систем, основанных на принципах регистрации и обработки отраженных ультразвуковых сигналов. Представлены необходимые сведения об основных уравнениях физической акустики, а также по технике акустических измерений и медицинского ультразвука. Описано функционирование ультразвуковых *B*-сканеров. Вторая половина пособия (главы 5 - 8) ориентирована на рассмотрение математических методов решения обратных задач рассеяния томографического типа, составляющих основу конструирования устройств акустической томографии.

Отметим сразу, что в пособии не нашли отражения некоторые важные области диагностического применения ультразвука в медицине. В первой половине это касается прежде всего доплеровских систем диагностики кровотока, во второй половине - методов ска-

лярной лучевой томографии. В то же время достаточно подробно рассмотрены методы и алгоритмы волновой (дифракционной) томографии. Это объясняется тем, что студентам уже на 3-м курсе читается отдельный предмет «Вычислительная томография», который формирует необходимый теоретический базис в области томографических методов, основанных на прямолинейной аппроксимации траекторий.

В качестве одного из основных элементов обучения студентов на кафедре рассматривается компьютерный практикум, закрепляющий учебный материал лекционных курсов и семинарских занятий в процессе выполнения вычислительных лабораторных работ. В связи с этим в пособии приводятся некоторые примеры компьютерного моделирования акустических обратных задач томографического типа, которые могут быть также применены в лабораторном компьютерном практикуме. Такая ориентация курса отражает общую тенденцию МИЭТ к применению современных программных средств для решения прикладных инженерно-математических задач, в том числе биомедицинского типа.

Автор благодарит сотрудников МИЭТ В.М. Амербаева, О.В. Губарькова, Ю.П. Лисовца, Ю.П. Маслобоева, В.М. Подгаецкого, А.М. Ревякина, С.В. Селищева, С.А. Терещенко и Г.В. Фролову за помощь в работе и плодотворные дискуссии.

Автор выражает также свою благодарность профессору кафедры акустики физического факультета МГУ В.А. Бурову; директору Института высокочастотной техники (г. Бохум, ФРГ), профессору Х. Эрмерту; зав. отделом исследований и перспективных разработок фирмы «Панаметрикс» (г. Волсам, США) г-ну Л. Линневорсу за сотрудничество и поддержку.

1. Применение ультразвука в биомедицинских исследованиях. Основные сведения

1.1. Место ультразвука в медицинской визуализации

Основные требования к любому проникающему излучению, применяемому в целях биомедицинской визуализации, заключаются в том, чтобы его распространение было геометрически предсказуемым, затухание в среде являлось не очень сильным и воздействие этого излучения на живой организм было максимально безвредным. Эти требования должны выполняться на частотах, для которых направленность излучения, определяемая дифракцией, соответствовала бы необходимому пространственному разрешению. Другими словами, длины волн проникающего излучения должны быть малы по сравнению с изучаемой структурой.

Всем этим требованиям в полной мере удовлетворяет распространение ультразвука (УЗ) в мягких тканях организма. Отклонение и деформация звуковых пучков, безусловно, происходят, но не настолько, чтобы качество изображения значительно ухудшалось. Затухание, являясь существенным фактором (иначе не было бы взаимодействий, используемых для визуализации), допускает, тем не менее, проникновение сигнала в мягкие ткани на глубины порядка 300 длин волн в мегагерцевом диапазоне частот, что обеспечивает получение изображений с достаточным отношением сигнал/шум при работе как в трансмиссионном режиме, так и в режиме регистрации данных обратного рассеяния. Дифракционные эффекты ограничивают разрешающую способность величиной порядка нескольких миллиметров.

Наиболее значительным преимуществом УЗ методов визуализации является их относительная безопасность. Этот тезис может

быть сформулирован в виде: «при уровнях экспозиции, соответствующих данной степени риска для пациента, УЗ методы исследования способны обеспечить значительно более высокое отношение уровня сигнал/шум в изображении, чем системы медицинской визуализации, основанные на применении ионизирующих излучений». На практике именно отношение сигнал/шум и его влияние на такие параметры, как разрешение по контрасту изображения, в конечном счете определяет максимальную дозу облучения, достижимую в рентгеновской или радиоизотопной визуализации. В случае УЗ исследований ограничение обычно определяется факторами, не связанными с радиационной безопасностью, хотя отношение сигнал/шум остается, тем не менее, первостепенным фактором.

Еще одна особенность ультразвука как средства визуализации в биомедицинских исследованиях - это возможность получения высококачественных, быстро сменяющихся изображений с частотой кадров выше пороговой частоты, за которой наблюдатель уже не воспринимает мерцаний. Следует отметить, что с учетом простоты технической реализации УЗ сканирующих устройств ультразвук превосходит в этом отношении все другие средства медицинской интроскопии.

Ультразвук взаимодействует с тканями органов по-разному и зачастую весьма специфично: значения таких параметров, как коэффициенты обратного рассеяния и затухания, у разных тканей могут существенно отличаться. Данное обстоятельство позволяет использовать достаточное число градаций контрастности и для некоторых диагностических задач может обеспечить исключительно важное преимущество, например, перед рентгеновской визуализацией, где коэффициент поглощения может быть малочувствительным к гистологическим изменениям.

В последнее время возрос интерес к методам так называемой УЗ характеристики биологических тканей. Развитие этой области УЗ исследований направлено на создание количественных и качественных процедур, которые в терминах визуализации можно рас-

смаатривать как поиск параметров изображения, обеспечивающих более четкое различие в конкретных ситуациях и тем самым возможность еще большего улучшения контрастности.

Другим важным моментом УЗ исследований, влияющим на способность разрешения по контрасту, является возможность отделять акустические сигналы от интерферирующих с исследуемым органом областей (например, от близлежащих тканей). Эта возможность является, по-видимому, отличительной для УЗ визуализации, тогда как в рентгеновском и радиоизотопном методах это достигается за счет специальных схем съема первичных данных и сложных процедур их математической обработки (имеется в виду компьютерная реконструкция образа в вычислительной томографии).

1.2. Практика и уровни облучения

Величину экспозиции для тканей человека, подвергающихся облучению в процессе УЗ медицинского сканирования, оценить довольно сложно. Для полной характеристики УЗ поля требуется много параметров. Обычно эти параметры измеряются в водяной ванне в условиях свободного поля. Наиболее важными из них являются частота, размеры излучателя, коэффициент заполнения при импульсном режиме, средняя по времени мощность излучения, пространственная и временная пиковые интенсивности.

Характерные величины параметров различных типов медицинских УЗ приборов приведены в табл. 1.1.

В современной биомедицинской практике понятие «интенсивность» рассматривается в большинстве случаев как «экспозиционная интенсивность», т.е. мощность, проходящая через единицу площади используемой апертуры. Единица измерения - Вт/см². При этом экспозиционная интенсивность подразделяется в зависимости от того, используется ли она для выражения пиковой величины или среднего значения. Последняя величина подразделяется, в свою очередь, на среднюю по пространству, т.е. по используемой апертуре, и

среднюю по времени, т.е. по определенному времени экспозиции.

Таким образом, на практике применяются следующие интенсивности: SATA - средняя по пространству, средняя по времени; SATP - средняя по пространству, пиковая по времени; SPTP - пиковая по пространству, пиковая по времени; SPTA - пиковая по пространству, средняя по времени.

Таблица 1.1

Характерные величины параметров медицинских УЗ приборов [17]

Тип оборудования	Частотный диапазон, МГц	Типичная площадь излучателя, мм ²	Средняя мощность, мВт	Интенсивность, Вт/см ² (SPTP)	Максимальное давление, 10 ⁵ Па
Диагностический					
Эхо-импульсный	1 - 20	100 - 3000	0,3 - 20	0,04 - 1700	1,1 - 71
Доплеровский	5 - 10	100	6 - 105	10 ⁻³ - 20	0,3 - 7,7
Терапевтический					
Непрерывный	0,75 - 3	500	0 - 15000	0 - 10	0 - 5,5
Импульсный	0,75	500	0 - 3000	0 - 10	0 - 5,5

В сокращенных обозначениях используются первые буквы английских слов: S - spatial (пространственный), T - temporal (временной); A - average (средний); P - peak (пиковый). Всемирная организация здравоохранения рекомендует для характеристики излучения УЗ аппаратуры или экспозиции живой ткани следующие параметры [17]: 1) для излучений и экспозиций в эхо-импульсных диагностических приборах - пиковую по пространству амплитуду давления (Па) - SPTA; 2) для терапевтических, хирургических и доплеровских диагностических приборов (импульсных и на непрерывных волнах) - основную мощность пучка (Вт), которая определяется как

0,541 от произведения пиковой по пространству, средней по времени интенсивности ($\text{Вт}/\text{см}^2$) на площадь сечения пучка на уровне 6 дБ (см^2). Множитель 0,541 вводится математически из предположения об осевой симметрии пучка с гауссовым профилем и линейном распространении гармонической волны.

1.3. Акустические характеристики биологических структур

До недавнего времени основная цель изучения акустических характеристик биологических тканей в плане медицинских приложений сводилась к получению данных, позволяющих провести градуировку эхо-графических систем визуализации по координатам время распространения - дальность и интенсивность сигнала - контрастность. В первом случае информативной специфической характеристикой ткани или органа является скорость звука c ; во втором случае - акустический импеданс $Z = \rho c$, где ρ - плотность соответствующей ткани или органа, а также поглощение УЗ излучения в процессе его распространения.

Прежде чем привести значения скорости звука, плотности, акустического импеданса (волнового сопротивления) и коэффициента поглощения α , характерные для медицинского ультразвука, представим основные сведения о природе звуковых волн.

УЗ волны являются акустическими колебаниями, существование которых обусловлено упругими силами, возникающими при деформировании среды распространения. Иными словами, УЗ волна - это процесс распространения механических возмущений. Возмущения, для которых с высокой степенью точности справедлив принцип суперпозиции, называются бесконечно малыми. Медицинский ультразвук соответствует распространению именно таких возмущений. Согласно современной классификации эти вопросы составляют предмет линейной акустики. В приближении линейной акустики скорость распространения любого возмущения не зависит от величины этого возмущения.

Звуковая волна сжатия и разрежения характеризуется рядом изменяющихся во времени и пространстве параметров. Прежде всего это амплитуда избыточного или звукового давления $\tilde{p} = p - p_0$, где p - давление в возмущенной среде; p_0 - среднее или равновесное давление. Другая величина, характеризующая звук, - колебательная скорость частиц жидкости или газа v . Отметим, что для медицинского ультразвука колебательная скорость частиц значительно меньше скорости распространения возмущений c (скорости звука). Поэтому акустическое число Маха $M_{\text{ак}} = v/c$ всегда много меньше единицы. Звуковая волна сопровождается также отклонением плотности $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ от ее равновесного значения ρ_0 . Далее будет показано, что \tilde{p} и v совпадают по фазе и $v = \tilde{p}/\rho_0 c$. В знаменателе этого выражения - акустическое сопротивление среды.

Биологические ткани и органы являются в большинстве случаев жидкостно-подобными. Теория жидкого состояния до настоящего времени детально не разработана. По этой причине теоретические расчеты скорости звука для биомедицинских приложений достаточно далеки от желаемых. Имеются лишь эмпирические и полуэмпирические выражения, дающие связь между c и такими макроскопическими параметрами, как плотность ρ и температура T . Кроме того, скорость акустических волн является величиной, зависящей от частоты колебаний (дисперсия скорости звука).

К настоящему времени накопилось очень большое количество работ по измерениям скорости ультразвука в биологических тканях, проведенным при самых разных физических условиях (температуре, давлении, частоте колебаний, плотности и т.д.). Методика таких измерений хорошо отработана и изложена во многих учебниках по физической акустике. Отметим только, что на УЗ частотах современные импульсные, фазовые и в особенности импульсно-фазовые методы позволяют получить относительную ошибку $\Delta c/c \sim 10^{-7} - 10^{-8}$, а абсолютное значение измерять с точностью $10^{-4} \%$.

Типичные значения скорости звука, плотности и акустического импеданса биомедицинских тканей, измеренные в диапазоне частот

1 - 10 МГц и в интервале температур от 20 до 37 °С, приведены в табл. 1.2. Все измерения выполнены либо *in vivo*, либо на свежееудаленных образцах ткани.

Таблица 1.2

Характерные значения скорости звука, плотности и акустического импеданса биологических тканей [24], [30]

Субстанция	c , м/с	ρ , г/см ³	$Z = \rho c$, г/см ² с	α , дБ/см
Жир	1470	0,97	$1,43 \cdot 10^5$	0,35 - 0,78
Костный мозг	1700	0,97	$1,65 \cdot 10^5$	0,35 - 0,78
Мышечная ткань	1568	1,04	$1,63 \cdot 10^5$	1,5 - 3,3
Мозговое вещество	1530	1,02	$1,56 \cdot 10^5$	0,35 - 0,78
Кость	3600	1,70	$6,12 \cdot 10^5$	12,0
Вода (20 °С)	1492	0,998	$1,49 \cdot 10^5$	0,0025
Воздух	331	0,0013	$4,30 \cdot 10^1$	12,0

В табл. 1.2 представлены также характерные значения коэффициента поглощения тканей для диапазона частот медицинского ультразвука. Подробно явление поглощения УЗ волн рассматривается в § 2.4.

2. Физические основы медицинского ультразвука

2.1. Распространение звука в жидкостно-подобных средах

Будем рассматривать идеальную сплошную среду, в которой вязкость и теплопроводность отсутствуют. Для такой среды справедливы уравнения гидродинамики идеальной жидкости и состояние каждого ее элементарного объема, подверженного воздействию акустической волны, может быть полностью описано с помощью следующих локальных акустических величин: $p(\mathbf{r}, t)$ - давления [Н/м²], $\rho(\mathbf{r}, t)$ - плотности [кг/м³]; $T(\mathbf{r}, t)$ - температуры [К]; $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ - скорости движения частиц в волне [м/с]; $\kappa(\mathbf{r}, t)$ - сжимаемости [м²/Н]; $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ - плотности силы [Н/м³].

Закон Ньютона для сплошной среды - равенство действующей силы произведению массы единицы объема среды на ее ускорение - в координатах неподвижного пространства (координатах Эйлера) запишется в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \nabla p(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{dt}[\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.1)$$

Если при движении жидкости разрывы в ней отсутствуют, масса в некотором фиксированном относительно неподвижного пространства объеме сохраняется. Закон сохранения массы жидкости выражается уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (2.2)$$

Уравнение движения (2.1) с учетом уравнения непрерывности (2.2) переходит в уравнение

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} - \frac{\nabla p(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (2.3)$$

Векторное уравнение (2.3) называется уравнением движения в форме Эйлера. Сразу отметим, что это уравнение нелинейное; нелинейность возникает, в частности, из-за присутствия конвективного члена $(\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{v}$. В общем случае учет конвективного члена в (2.3) позволяет анализировать широкий класс важных нелинейных акустических эффектов. Однако, как отмечалось ранее (см. § 1.3), в рамках линейной акустики этот член отбрасывают, так как \mathbf{v} мало и $(\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{v}$ - член второго порядка малости. Поскольку (2.2) и (2.3) образуют лишь четыре уравнения для определения пяти неизвестных (v_x, v_y, v_z, p, ρ) , необходимо еще одно уравнение, связывающее p и ρ . Таким уравнением служит уравнение состояния среды:

$$\Psi(p, \rho, T) = 0. \quad (2.4)$$

Следствием из уравнения состояния для жидкостно-подобных сред является следующее выражение для коэффициента сжимаемости, устанавливающее соотношение между объемом и давлением или плотностью и давлением:

$$\kappa(\mathbf{r}) = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (2.5)$$

Как указывалось ранее, для медицинского ультразвука справедливы соотношения линейной акустики $\tilde{p}(\mathbf{r}, t) \ll p_0$, $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \ll \rho_0$, а также $|(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \vec{\nabla})\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|$. Тогда уравнение движения (2.1) принимает вид

$$\nabla \tilde{p}(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.6)$$

а уравнение непрерывности (2.2) сводится к уравнению

$$\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.7)$$

В предположении безвихревого акустического поля колебательная скорость частиц в волне записывается в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ - скалярный потенциал скорости. Подставляя (2.8) в (2.6), получаем

$$\tilde{p}(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.9)$$

При выводе (2.9) произведено интегрирование по пространству, а константа интегрирования равняется нулю. Подстановка (2.8) в (2.7) дает

$$-\rho_0 \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.10)$$

Из уравнения состояния следует, что

$$\frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Тогда из (2.10) и (2.11) получаем

$$-\rho_0 \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{r}, t)}{\partial p} \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.12)$$

Объединяя (2.10) и (2.5), имеем

$$-\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) + \kappa(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.13)$$

или окончательно

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.14)$$

где

$$c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\kappa(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r})}} \quad (2.15)$$

скорость звука.

Уравнение (2.14) является основным уравнением линейной акустики, описывающим распространение акустических возмущений в неоднородной среде. Оно носит название волнового уравнения. Отметим, что волновому уравнению вида (2.14) удовлетворяют также и другие акустические величины \tilde{p} , $\tilde{\rho}$ и \mathbf{g} .

Простейшим видом волнового движения является плоская волна: возмущение среды в этом случае одномерно, и уравнение (2.14) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} - c^2(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.16)$$

Решение одномерного волнового уравнения (2.16) представляет собой две плоские волны произвольного вида, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях:

$$\Phi = \Phi_+(x - ct) + \Phi_-(x + ct). \quad (2.17)$$

Форма этих волн со временем не изменяется, т.е. волны являются стационарными. Из решения (2.17) следует, что константа c имеет смысл скорости распространения этих волн, т.е. скорости звука.

В сферической системе координат волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial t^2} - \frac{c^2(r)}{r} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.18)$$

где r - радиус-вектор, проведенный из фокальной точки до границы сферического волнового фронта. Общее решение (2.18) выглядит следующим образом

$$\Phi = \frac{1}{r} f(t \pm r/c), \quad (2.19)$$

где f - некоторая функция; знак «минус» соответствует расходящейся, а знак «плюс» - сходящейся сферическим волнам.

Аналогично в цилиндрической системе координат имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial t^2} - \frac{c^2(r)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.20)$$

а общее решение волнового уравнения в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{r}} f(t \pm r/c). \quad (2.21)$$

В акустических биомедицинских измерениях часто используются монохроматические источники звука, работающие на некоторой частоте ω . Излучаемые таким источником волны будут гармоническими или монохроматическими. Гармонические решения волнового уравнения оказываются полезными для анализа многих приложений медицинского ультразвука. Соответствующие решения принимают следующий вид:

- для плоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении оси x :

$$\Phi = \Phi_0 e^{-j(kx - \omega t)}; \quad (2.22)$$

- для сферической волны, расходящейся из начала системы координат $r = 0$:

$$\Phi = \Phi_0 \frac{1}{r} e^{-j(kr - \omega t)}; \quad (2.23)$$

- для цилиндрической волны, расходящейся с некоторой линии при $r = 0$:

$$\Phi = \Phi_0 \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-j(kr - \omega t)}. \quad (2.24)$$

2.2. Отражение и преломление на импедансных границах

Характерные размеры неоднородностей, с которыми придется иметь дело в УЗ диагностических исследованиях, различаются по крайней мере на четыре порядка: от биологических клеток (около 10 мкм или 0,03 λ при 5 МГц) до граничных областей органов (до 10 см или 300 λ при 5 МГц). В соответствии с этим имеют место различные типы взаимодействия ультразвук - биологическая структура.

Для характеристики УЗ волны, взаимодействующей с протяженной границей (масштаб взаимодействия $a \gg \lambda$), применяются правила лучевой теории отражения и рефракции, т.е. правила геометрической акустики. В соответствии с этими правилами при наклонном падении УЗ волны на гладкий, безграничный интерфейс

между двумя средами с различными акустическими импедансами $Z_1 = \rho_1 c_1$ и $Z_2 = \rho_2 c_2$ (рис. 2.1) справедливы следующие соотношения:

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2}; \quad (2.25)$$

$$\frac{J_1}{J_0} = \left(\frac{Z_2 \cos \theta_0 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2} \right)^2; \quad (2.26)$$

$$\frac{J_2}{J_0} = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \theta_0 \cos \theta_2}{(Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2)^2}, \quad (2.27)$$

где $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ - углы падения, отражения и преломления соответственно; J_0, J_1, J_2 - интенсивности падающей, отраженной и преломленной (прошедшей во вторую среду) волн соответственно.

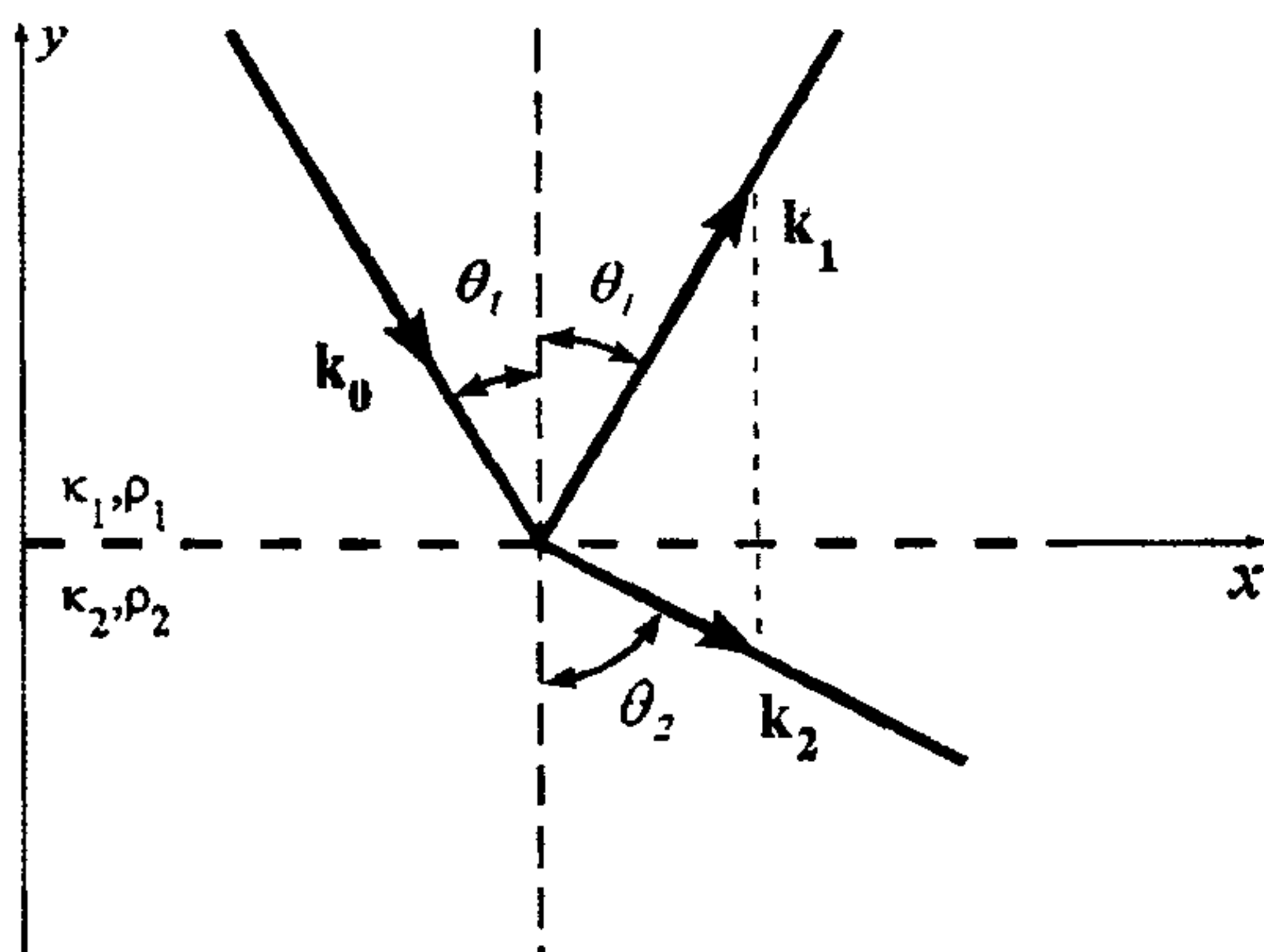


Рис 2.1 Отражение и рефракция плоской волны на импедансной границе

Наиболее существенным фактором, определяющим качество УЗ изображений, сформированных в эхо-режиме, т.е. в режиме регистрации отраженных сигналов, является отражательная способность как абсолютный коэффициент отражения на плоской границе раздела двух сред с разными акустическими характеристиками:

$$R = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (2.28)$$

где p_0 , p_1 - амплитуды акустического давления в падающей и отраженной волнах соответственно. При этом коэффициент прохождения дается выражением

$$T = \sqrt{\frac{J_2}{J_0}} = \frac{p_2}{p_0} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}, \quad (2.29)$$

где p_2 - амплитуда звукового давления в прошедшей волне.

Из (2.28) видно, что R может быть величиной как положительной, так и отрицательной в зависимости от соотношения Z_1 и Z_2 . Другими словами, отражение от границы, на которой характеристический импеданс уменьшается, приведет к изменению фазы отраженного сигнала: сжатие среды выразится в виде положительного избыточного давления, и наоборот. Акустическое давление в прошедшей волне будет, напротив, всегда в фазе с падающей на границу волной.

Типичные значения модуля коэффициентов отражения при прохождении УЗ волны интерфейсов между различными тканями представлены в табл. 2.1.

Анализ выражения (2.28) и данных, представленных в табл. 2.1, показывает: чем больше различаются импедансы соседних тканей, тем большая часть энергии отражается от их границы. В частности, в мягких тканях коэффициент отражения характеризуется величинами от -10 дБ (на границе между жировой и мышечной тканями) и ниже. Это означает, что уровень отраженного сигнала более чем на 10 дБ ниже уровня падающего сигнала. Это весьма низкие уровни отражения (менее 1 %), так что большая часть акустической энергии проходит через поверхность раздела сред и может быть использована для визуализации глубоких внутренних структур.

Однако в некоторых случаях может происходить очень сильное отражение, например на поверхности раздела кость - мышца (коэффициент отражения порядка -2 дБ). Тогда в глубоко расположенные ткани передается значительно меньшая часть энергии и на эхо-изображении наблюдают «тень». Такое «затемнение», появляющееся в области, где оно не может быть обусловлено

Таблица 2.1

Соотношение амплитуд звукового давления в отраженной и падающей волнах и доля отраженной энергии при нормальном падении УЗ волны на импедансную границу [17]

Отражающая граница	R	Доля отраженной энергии, %
Жир-мышечная ткань	0,10	1,08
Жир-почка	0,08	0,64
Мышечная ткань-кровь	0,03	0,07
Кость-жир	0,69	48,9
Кость-мышечная ткань	0,64	41,2
Мягкая ткань-вода	0,05	0,23
Мягкая ткань-воздух	0,9995	99,9
Мягкая ткань-ЦТС-4	0,89	80,0

естественными анатомическими факторами, свидетельствует об отклонении от нормы.

Если две среды имеют одинаковый акустический импеданс, то в этом случае $R = 0$, и тогда падающая УЗ волна полностью без отражений проходит в граничную среду. Данное явление учитывается при конструировании УЗ датчиков, в которых внешняя поверхность, контактирующая с телом пациента и называемая согласующим слоем, подбирается по значению акустического импеданса поверхностных тканей человека.

Одним из требований к контактной среде, которая наносится на поверхность датчика или на кожу пациента перед обследо-

ванием, является близость ее акустического импеданса к значению акустического импеданса кожи пациента. Выполнение данного требования - одно из условий, позволяющих получить УЗ изображение при минимальной мощности УЗ излучения.

Из табл. 2.1 можно, кроме того, определить, что коэффициент отражения УЗ волны на границе мягкая ткань - воздух близок к единице. Это свидетельствует о практически полном отражении ультразвука на данном типе импедансных границ, т.е. воздух является серьезным препятствием на пути распространения УЗ излучения, что следует принимать во внимание при установке датчика на поверхности тела пациента или при обследовании воздухосодержащих органов.

2.3. Рассеяние УЗ волн

Интенсивность и пространственное распределение отраженного от объекта ультразвука зависят не только от различий акустических импедансов объекта и среды окружения, но и от физических размеров, ориентации и формы объекта. Если на рассеивающий элемент падает звуковая волна, интенсивность (т.е. поток энергии через единичную площадку) которой равняется J , то полная рассеянная мощность S будет пропорциональна J . Коэффициент пропорциональности этих величин σ_s называется полным сечением рассеяния и имеет размерность площади:

$$\sigma_s = \frac{S}{J}. \quad (2.30)$$

Можно ввести также дифференциальное сечение рассеяния $\sigma_d(\phi, \vartheta)$. Если принять, что $dS(\phi_s, \vartheta_s)$ - полная мощность, рассеянная в пределах телесного угла $d\Omega$ в направлении (ϕ_s, ϑ_s) , то

$$\sigma_d(\phi_s, \vartheta_s) = \lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{dS(\phi_s, \vartheta_s)}{J d\Omega}. \quad (2.31)$$

Частным случаем дифференциального сечения рассеяния является сечение обратного рассеяния $\sigma_b = \sigma_d(0, \pi)$, которое служит

весьма важной характеристикой при проектировании УЗ систем визуализации, работающих в режиме регистрации отраженного сигнала.

Определения (2.30) и (2.31) применимы к произвольной рассеивающей структуре и их можно в равной степени использовать как в случае одиночного препятствия, так и при наличии совокупности рассеивателей. В тех средах, где рассеиватели распределены случайным образом и рассматриваемый объем содержит достаточно большое их число, рассеиваемая мощность будет пропорциональна этому объему, а рассеяние называется некогерентным. Неоднородности в биологических тканях имеют сложную форму и различные размеры, причем их местоположение и ориентация зачастую носят случайный характер. При *B*-сканировании (см. § 6.2) полутонное изображение, т.е. изображение с большим числом градаций яркости, формируется в основном волнами, рассеянными на подобных мелкомасштабных структурах.

В общем случае рассеяние на неоднородностях, характерные размеры которых меньше или много меньше длины волны тестового излучения, имеет широкое угловое распределение и является частотно-зависимым. Процесс рассеяния описывается в этом случае рэлеевской теорией рассеяния, в соответствии с которой коэффициент отражения пропорционален четвертой степени частоты.

Хорошим примером рэлеевского рассеяния служит взаимодействие ультразвука частоты 1 - 10 МГц с кровью. Кровь, как известно, состоит из жидкой плазмы, в которой взвешены частицы - эритроциты, лейкоциты, тромбоциты и др. Эритроцит является гибким двояковогнутым диском, имеющим средний диаметр 7 мкм и среднюю толщину 2 мкм. Средний объем эритроцита равен приблизительно 90 мкм^3 и в одном кубическом миллиметре находится приблизительно 5×10^6 эритроцитов. Принимается, что эритроциты являются главным источником рассеяния ультразвука, так как лейкоцитов (хотя они гораздо больше эритроцитов) в крови относительно мало ($7,5 \times 10^3 \text{ мм}^{-3}$), а тромбоциты, чья концентрация го-

раздо больше ($3,5 \times 10^5 \text{ мм}^{-3}$), существенно меньше эритроцитов по размеру.

2.4. Поглощение УЗ волн

По мере распространения звуковой волны ее амплитуда уменьшается. Это связано с рядом причин: с уменьшением плотности энергии волны из-за увеличения поверхности волнового фронта (в частности, для сферических, цилиндрических и вообще расходящихся волн), поглощением энергии волны вследствие диссипативных процессов, вызываемых вязкостью и теплопроводностью среды, рассеянием на неоднородностях. Уменьшение амплитуды волны из-за процессов диссипации характеризуется коэффициентом поглощения α . Коэффициент поглощения УЗ волны зависит от свойств среды, частоты УЗ колебаний и для жидкостно-подобных сред определяется формулой Стокса:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \eta f^2}{3\rho c^3}, \quad (2.32)$$

где η - коэффициент вязкости среды. Коэффициент поглощения α измеряется в см^{-1} или в дБ/см. В первом случае величина, обратная α , носит название глубины проникновения ультразвука и определяет расстояние, на котором его интенсивность становится равной 14 % от исходной величины. Абсолютное значение α в области УЗ частот можно измерять с ошибкой 2 - 5 %.

Характерные значения коэффициента поглощения тканей некоторых органов в расширенном диапазоне частот приведены на рис. 2.2. Аналогичные данные для диапазона частот медицинского ультразвука представлены на рис. 6.2.

Трудности в определении коэффициента поглощения звука по результатам измерений состоят также в необходимости детального учета неоднородности излучаемого акустического поля, дифракционных эффектов, неизменности физических свойств среды.

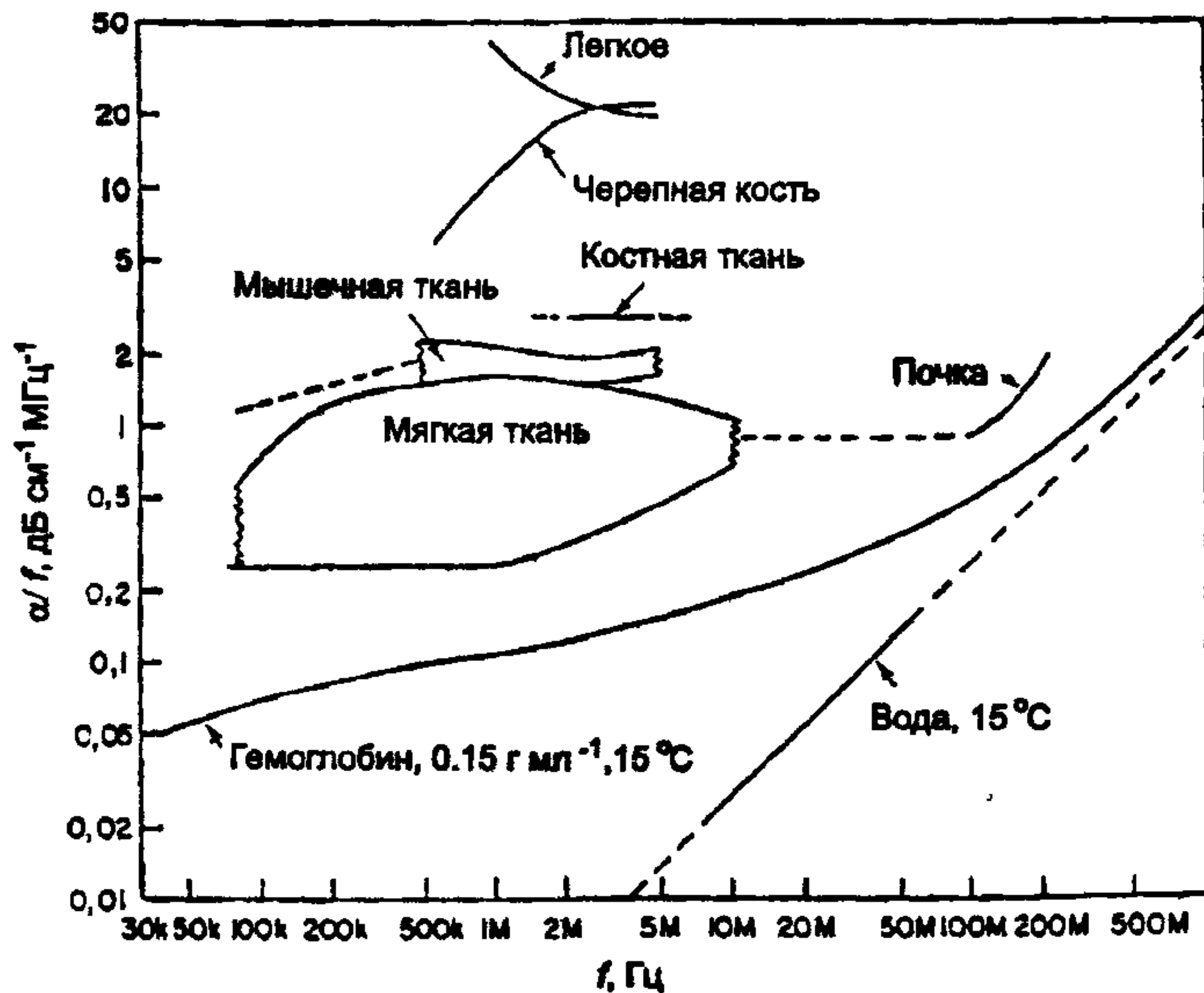


Рис. 2.2. Поглощающая способность биомедицинских тканей в расширенном диапазоне частот [24], [25]

Для газов измерения на характерных медицинских УЗ частотах (выше нескольких мегагерц) затруднены из-за очень большого поглощения.

3. Генерация и регистрация УЗ волн

3.1. Пьезоэлектрический эффект

Пьезоэлектрический эффект - это наблюдающееся в образцах некоторых анизотропных материалов явление, заключающееся в нарушении равновесного распределения электрических зарядов под действием механической деформации образца. Возможен также и обратный пьезоэлектрический эффект, состоящий в механической деформации среды под действием внешнего электрического поля.

Пьезоэлектрическим эффектом обладают материалы различного типа, структура которых характеризуется сильными ионными связями. Один из классов таких материалов представляют естественные кристаллы, такие как кварц, турмалин, ниобат лития. Другой важный класс составляют сегнетоэлектрики - аморфные материалы типа некоторых керамик и пластмасс, имеющие микрокристаллическую структуру и обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризацией, которая существенно изменяется под влиянием внешних воздействий.

Механизм прямого пьезоэлектрического эффекта демонстрирует рис. 3.1 на примере кристалла кварца, ячейка которого содержит три молекулы SiO_2 .

При сжатии вдоль вертикальной оси положительный ион Si и отрицательный ион O перемещаются в глубь ячейки, в результате чего на плоскостях A и B возникают заряды противоположного знака. Можно видеть, что пьезоэффект наблюдается в кристаллах, не имеющих центра симметрии, и невозможен в противном случае.

Для генерации и приема акустических волн в медицинских диагностических УЗ системах наиболее широко применяется поликристаллическая пьезокерамика, подвергнутая предварительной поля-

ризации в электрическом поле, например цирконаттитанат свинца (химическая формула - $PbTi_{1-x}Zr_xO_3$, где $x \approx 0,5$).

Аналогичными свойствами обладают, в частности, ниобат свинца и титанат лития. Эти материалы имеют сравнительно высокий коэффициент электромеханической связи и обладают заметной чувствительностью вне резонанса, что позволяет использовать их в широкополосном режиме. Кроме того, с учетом высокой диэлектрической проницаемости этих материалов из них могут быть изготовлены преобразователи достаточно малых размеров, электрический импеданс которых не будет чрезмерно большим.

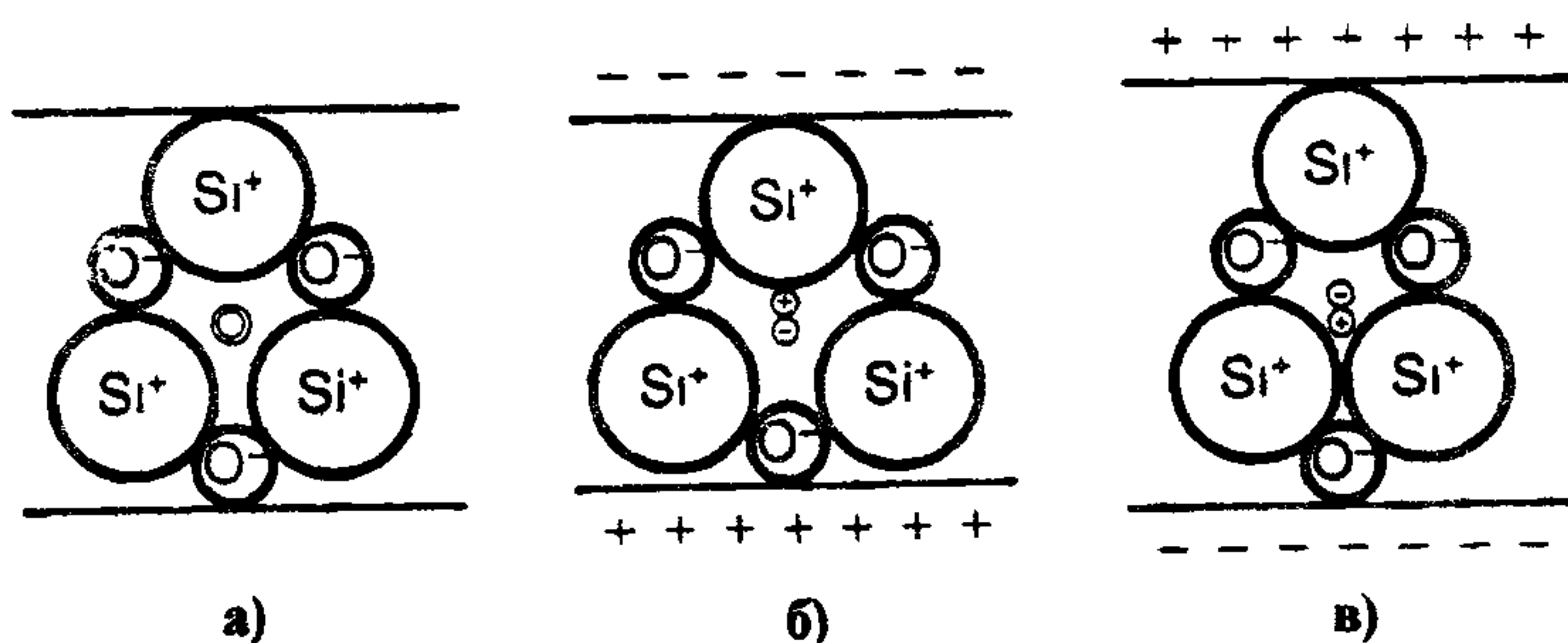


Рис 31 Механизм прямого пьезоэффекта на примере деформации структуры кварца. а - равновесное состояние, б - сжатие, в - растяжение кристалла

Следующий важный класс биомедицинских пьезоэлектрических материалов образуют компаунды. структура которых позволяет осуществлять их напыление в виде тонких пленок на различные подложки. Наиболее известными среди них являются оксид цинка (ZnO), сульфид кадмия (CdS) и нитрид алюминия (AlN).

Количественной характеристикой пьезоэффекта является совокупность пьезоконстант - коэффициентов пропорциональности в соотношениях между электрическими величинами (напряженность электрического поля E , поляризация, электрическое смещение) и механическими величинами (механические напряжения, относи-

тельные деформации). К основным параметрам относятся коэффициент электромеханической связи d_{33} , определяющий ту часть электрической энергии, которая может быть преобразована в упругую энергию и наоборот, и пьезоэлектрический модуль g_{33} , представляющий собой отношение наведенного электрического поля к единичной деформации и наоборот. Таким образом, в системах УЗ диагностики коэффициент электромеханической связи может быть охарактеризован как «константа излучения», а пьезоэлектрический модуль соответствует «константе приема».

3.2. Модель излучателя и его конструктивная реализация

Основные закономерности формирования УЗ пучка можно проследить на примере функционирования несфокусированного плоского кругового единичного преобразователя. Поле, формируемое таким преобразователем, имеет ярко выраженную пространственную структуру: цилиндрически коллимированное ближнее поле (зона Френеля) и конически расходящееся дальнее поле (зона Фраунгофера). В ближней зоне пучок ультразвуковых лучей можно считать параллельным на расстоянии

$$L = \frac{a^2}{\lambda}, \quad (3.1)$$

где a - радиус поршневого преобразователя. Это расстояние соответствует координате наиболее удаленного максимума поля в ближней зоне. Поясним это обстоятельство.

Потенциал поля излучения круглого поршня радиуса a , который гармонически колеблется в жестком экране с заданной амплитудой скорости v_0 , определяется в любой точке пространства \mathbf{r} интегралом Рэлея:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{v_0}{2\pi} \int_S \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (3.2)$$

где S - геометрическая область, образуемая поверхностью излучателя, координата каждой точки которой задается вектором \mathbf{r}' .

Обозначив в (3.2) величину $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ через \bar{r} и перейдя к цилиндрическим координатам ρ и ψ при интегрировании по поверхности S , запишем потенциал φ на оси излучателя в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{v_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+\rho^2}}}{z^2 + \rho^2} \rho d\rho d\psi, \quad (3.3)$$

где z - координата вдоль линии наблюдения. Проинтегрировав (3.3) по ψ , получим

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{v_0}{jk} \left(e^{jk\sqrt{z^2+a^2}} - e^{jkz} \right) = \\ &= \frac{2v_0}{k} e^{\frac{jk}{2}(\sqrt{z^2+a^2}+z)} \sin \left[\frac{k}{2} \left(\sqrt{z^2+a^2} - z \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Типичные графики зависимостей $|\varphi(z)|$ для двух поршневых преобразователей, имеющих радиусы $a = 1,5$ см и $a = 2,0$ см и излучающих УЗ сигнал на частоте 3 МГц в однородную жидкостно-подобную среду (длина волны $\lambda \approx 0,5$ мм), изображены на рис. 3.2. Отметим характерные особенности поля в соответствии с выражением (3.4) и приведенными графическими данными. При значениях z , удовлетворяющих условию

$$\sqrt{z^2 + a^2} - z = 2m(\lambda/2), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

абсолютная величина $|\varphi(z)|$ обращается в нуль, что отражает известный результат, заключающийся в том, что нули соответствуют четному числу зон Френеля, укладывающихся на излучателе. Аналогично при значениях z , равных

$$\sqrt{z^2 + a^2} - z = (1 + 2n)(\lambda/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

абсолютная величина $|\varphi(z)|$ достигает максимальных значений, т.е. максимумы формируются в том случае, когда на излучателе укладывается нечетное число зон Френеля. Как и следовало ожидать, при $a \gg \lambda$ координата наиболее удаленного максимума ($n = 0$) оценивается соотношением (3.1).

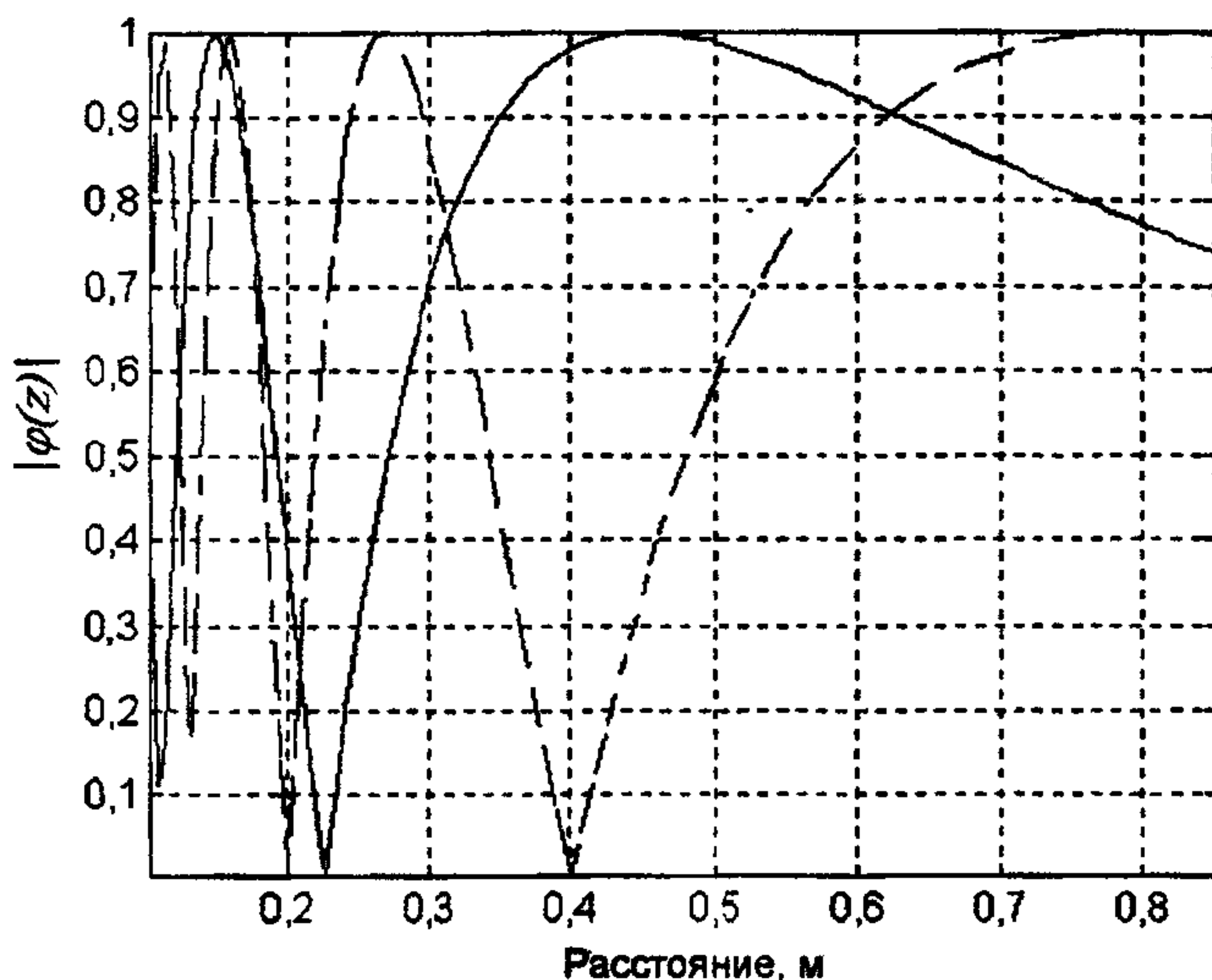


Рис. 3.2. Зависимости абсолютных величин поля на оси круглого поршневого излучателя от расстояния z . (Условные обозначения: — $a = 1,5$ см; - - $a = 2,0$ см.)

На рис. 3.2 отчетливо видно, что интенсивность звука в ближнем поле изменяется довольно сложным образом. Однако в тех случаях, когда при создании УЗ интроскопических устройств необходимо оценить соответствующее распределение интенсивности звукового поля излучателя, можно воспользоваться соотношением

$$\frac{I_z}{I_0} = \sin^2 \frac{k}{-2} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z \right), \quad (3.7)$$

где I_0 - максимальная интенсивность на оси излучателя; I_z - интенсивность излучения на расстоянии z от излучателя; k - волновое число.

На границе ближнего поля пучок ультразвуковых параллельных лучей становится расходящимся, изменения интенсивности, обусловленные интерференцией волн, постепенно сглаживаются и

излучение распространяется с почти одинаковой интенсивностью по волновому фронту. Угловое расхождение пучка является функцией отношения λ/a и может быть представлено в виде

$$\sin \beta \approx 0,61\lambda/a, \quad (3.8)$$

где β - половина телесного угла.

На рис. 3.3 схематично представлены основные элементы конструкции УЗ медицинского преобразователя [32]. Тонкий пьезокерамический излучатель помещается между задним поглощающим слоем и передним контактным слоем, после чего все три элемента встраиваются в защитный корпус. Поглощающий слой использу-

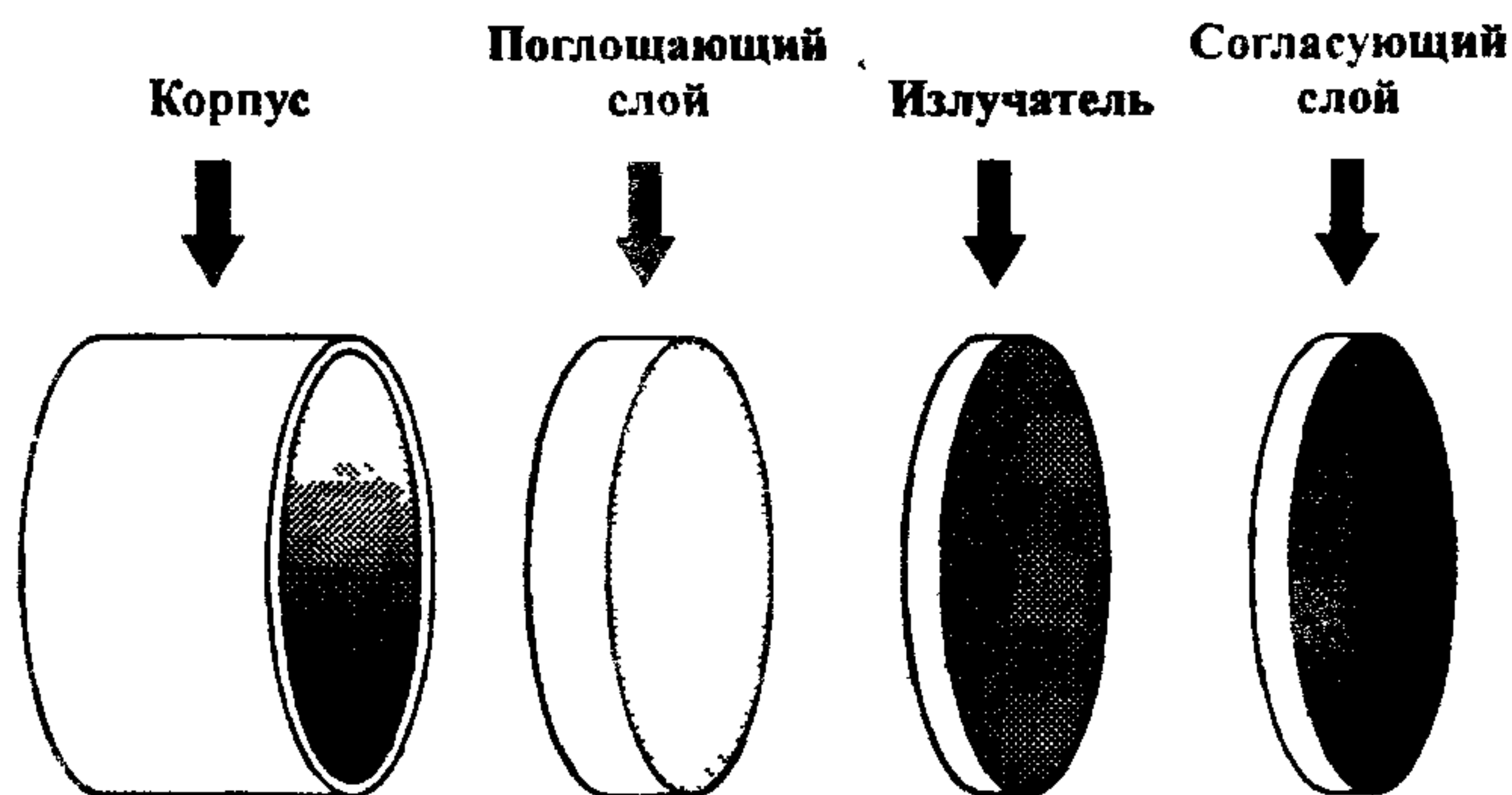


Рис 3.3. Основные элементы конструкции излучателя

ется для демпфирования нежелательных осцилляций кристалла и создания таким образом короткого выходного УЗ импульса. Передний контактный слой выполняет двойную функцию: во-первых, защищает пьезокерамику от возможных механических повреждений в процессе сканирования и, во-вторых, предохраняет пациента от потенциально возможного электрического контакта. Электрический импульс, подводимый к электродам, помещаемым на торцевых поверхностях пьезокерамического излучателя, вызывает изменение осевого размера кристалла. После его прекращения кристалл воз-

вращается в недеформированное состояние, излучая через контактный слой УЗ сигнал в исследуемом направлении.

3.3. Методы электронного сканирования и фокусировки

Хотя УЗ изображения можно получать, возбуждая в каждый момент времени единичный элемент, ориентированный соответствующим образом для формирования отдельных строк изображения, из-за низкой разрешающей способности и чувствительности такой метод оказывается малоэффективным. Кроме того, имеют место трудности, связанные с движением преобразователя. Указанные недостатки решаются в современной медицинской технике путем использования для генерации и регистрации УЗ сигналов матриц преобразователей (многоэлементных решеток).

Матрица преобразователей представляет собой приемно-излучательную систему, образованную группой одиночных пьезоэлектрических преобразователей, объединенных соответствующим образом и совместно управляемых с целью достижения как требуемого отклонения пучка относительно поверхности матрицы, так и его возможной фокусировки.

Широкое распространение получили два типа приемно-излучательных решеток: с линейным шаговым перемещением пучка (обычно называемые просто линейной матрицей) и с линейной фазированной матрицей (обычно называемой фазированной матрицей).

Конфигурация линейной матрицы с шаговым перемещением пучка показана на рис. 3.4. Элементы матрицы объединены в небольшие группы. В результате последовательного отключения последнего элемента группы и подключения следующего элемента матрицы группа шагами перемещается вдоль решетки, сдвигаясь каждый раз на один элемент. Благодаря формированию группы элементов увеличивается активная площадь преобразователя, возрастает чувствительность и в соответствии с теорией дифракции увеличение апертуры повышает разрешающую способность в дальней

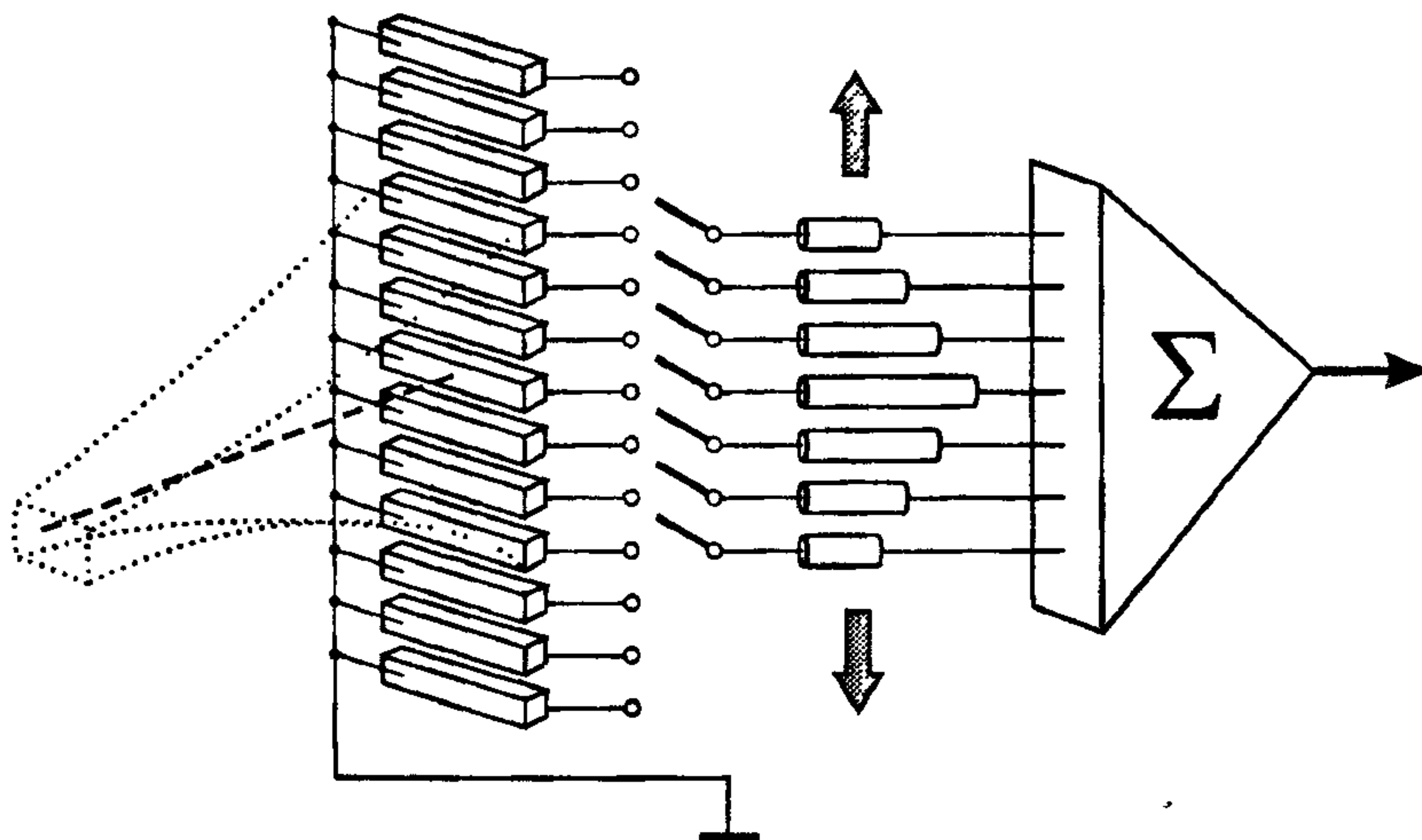


Рис. 3.4. Линейная матрица в режиме приема [1], [32]

зоне. В качестве примера заметим, что уже при группе из трех элементов область дальнего поля начинается примерно в девять раз дальше от поверхности преобразователя и расходится на меньший угол по сравнению со случаем одного элемента. Однако при группировании элементов естественно снижается разрешающая способность в ближней зоне. Приведем характерные значения параметров линейных матриц, применяемых в современной аппаратуре *B*-сканирования: количество элементов - от 60 до 196; размер отдельного излучателя - от 1 до 4λ ; число элементов в группе - от 8 до 128; общая длина керамики - от 2 до 11,5 см; рабочая частота - от 3,5 до 7,5 МГц.

В системах с фазированной матрицей развертка имеет форму сектора. Все элементы фазированной матрицы возбуждаются одновременно, а угол наклона УЗ пучка меняется путем соответствующего фазирования излучаемых сигналов, подводимых к элементам, а также путем фазирования сигналов, принимаемых каждым эле-

ментом (рис. 3.5). Говоря точнее, как угол наклона, так и фокусировка фактически определяются относительной задержкой сигналов, создаваемой каждым элементом. На рис. 3.4 и 3.5 линии задержки представлены в виде цилиндров, длины которых пропорциональны временам задержки.

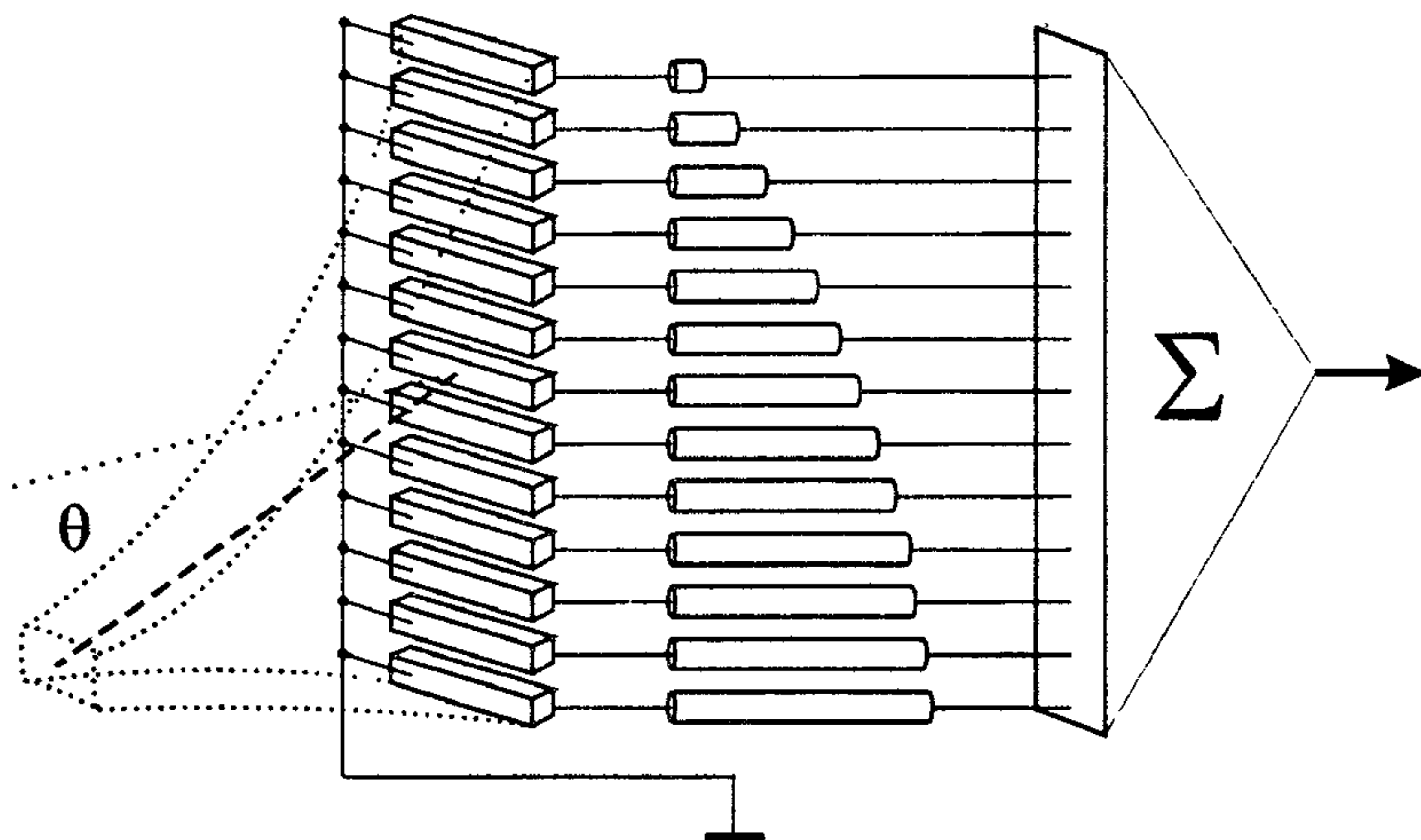


Рис. 3.5. Фазированная матрица в режиме приема [1], [32]

Для изменения величины задержки сигнала применяются два схемотехнических решения: а) набор линий постоянной задержки, подключаемых к цепям, по которым проходит сигнал, в соответствующие моменты времени и в определенной последовательности; б) набор линий задержки с электронной регулировкой, в которых длительность задержки плавно меняется при помощи соответствующего сигнала управления. Характерные значения параметров фазированных матриц: количество элементов - от 48 до 128; максимальный угол отклонения - от 40 до 45°; общая длина керамики - от 1,4 до 2,8 см; рабочая частота - от 2,5 до 7 МГц.

4. В-сканирование

4.1. Формирование ультразвуковых изображений

Формирование акустического изображения во многих отношениях идентично формированию изображения в оптике. Акустическое изображение можно даже регистрировать непосредственно на фотопленку, но такой метод в современных условиях обладает невысокой чувствительностью и поэтому мало пригоден для целей диагностики. При формировании как акустических, так и оптических изображений, базирующихся на принципах управления формой и направлением сканирующего луча, часто используются преломляющие и отражающие элементы (линзы, призмы, зеркала и т.п.); в обоих случаях разрешающая способность ограничена дифракционными эффектами, контраст изображения обеспечивается за счет изменения поглощения или импеданса. Для обеспечения дополнительного контрастирования в условиях, когда изменения поглощения или импеданса недостаточны для характеристики структур объекта, применяются фазоконтрастные схемы. Наконец, как в оптике, так и в акустике разработаны голографические методы регистрации изображений.

Тем не менее, между оптическим и акустическим методами формирования изображений имеется существенное различие, которое обусловлено прежде всего самой природой проникающего УЗ излучения и его регистрацией: непосредственно «видеть» звук не представляется возможным. Поэтому все методы акустической интроскопии требуют преобразования акустической информации в видимую. Наиболее распространенный метод - преобразование акустического сигнала в электрический при помощи электромеханического преобразователя и последующая обработка электрического сигнала

для визуального представления в виде *A*-, *B*-, *C*- или *M*-эхограмм.

A-эхограмма - это представление в виде осциллограммы на экране электронно-лучевой трубки зависимости амплитуды УЗ сигнала, отраженного от препятствий (импедансных границ или импедансных неоднородностей), встречающихся вдоль траектории зондирующего ультразвукового сигнала, от глубины сканирования. Для визуализации структуры органа или ткани вдоль луча по горизонтальной оси откладывается время (глубина сканирования), по вертикальной - амплитуда отраженного сигнала для момента времени, соответствующего отражению от неоднородности. Промежутки времени между зондирующими пакетами импульсов выбираются при этом так, чтобы можно было произвести регистрацию отраженного сигнала, соответствующего максимальной глубине сканирования. Метод не получил в медицинской диагностике широкого распространения из-за того, что уверенное распознавание анатомических источников эхо-сигнала связано в данном случае с значительными трудностями.

В методе яркостной индикации (*B*-эхограмма) отраженный сигнал модулирует яркость луча электронно-лучевой трубки при его линейной горизонтальной развертке. Яркость каждого элемента на экране пропорциональна амплитуде эхо-сигнала, а расстояние вдоль строки пропорционально расстоянию до отражающей структуры. Таким образом, измеренный сигнал представляется на экране монитора точно так же, как и при формировании *A*-эхограммы, но в отличие от последнего каждому положению луча на области сканирования соответствует строго определенное положение на устройстве отображения.

Сначала изображение по этому методу получали на экране двухуровневой запоминающей электронно-лучевой трубки, обладавшей очень узким динамическим диапазоном яркостей, что приводило к утере значительной доли информации, содержащейся в амплитуде эхо-сигнала, диапазон которой достигал около 30 дБ. Поэтому на экране регистрировались только сильные зеркально отра-

женные сигналы. С созданием эффективных преобразователей УЗ изображения появилась возможность использования дисплеев с широким динамическим диапазоном яркости. Это привело к возникновению нового метода обработки сигналов и их представления в виде полутоновых изображений (метод «серой шкалы») - метода *B*-сканирования («Brightness-Mode Imaging»), получившего наибольшее распространение в современной УЗ диагностической аппаратуре.

Метод *C*-сканирования обеспечивает получение двумерного изображения объекта в прямоугольной системе координат. В отличие от метода *B*-сканирования, при котором одна из координат изображения определяется временем прихода акустического импульса, при *C*-сканировании время не относится к числу основных информационных факторов. Так, при *C*-сканировании в эхо-импульсном режиме время прихода импульсов определяет лишь расстояние от преобразователя до сканируемой плоскости, а при *C*-сканировании в трансмиссионном режиме время прихода вообще не имеет значения. Изображения, формируемые *C*-сканерами, аналогичны рентгеновским флюорографическим изображениям. Безусловно, они имеют более привычный вид, чем *B*-изображения, и часто легче поддаются интерпретации. Однако техническая реализация *C*-сканирования связана с серьезными трудностями, ограничивающими его применение в клинической практике.

В методе двумерной яркостной индикации (*M*-методе), как и в *B*-методе, эхо-сигнал модулирует яркость луча электронно-лучевой трубки при линейной горизонтальной развертке, но дополнительно производится развертка строк по вертикали. В результате получается семейство кривых, изображающих положение отражающих границ раздела в зависимости от времени. Такой режим используется при исследовании движения клапанов сердца и других внутренних органов.

4.2. Метод *B*-сканирования

Метод *B*-сканирования, или сканирование с яркостной индикацией дает возможность получать в режиме регистрации отраженного сигнала двумерное изображение сканируемого органа в плоскости его поперечного сечения. Изображение при *B*-сканировании формируется в результате перемещения коллимированного акустического пучка в выбранной плоскости. Отраженные от структурных неоднородностей акустические сигналы образуют на экране монитора строки развертки, соответствующие направлениям распространения ультразвука в ткани. В стандартном варианте для генерации и регистрации УЗ сигналов используется один и тот же пьезоэлектрический преобразователь (одна и та же приемно-излучательная система). Одна из координат *B*-изображения пропорциональна времени прихода эхо-сигналов малой длительности, отраженных от неоднородностей акустического импеданса вдоль прямолинейной (в рамках выбранной модели) траектории распространения тестового УЗ сигнала. Время прихода очередного отраженного импульса соответствует глубине залегания соответствующей структуры: эхо-сигналы от структур, расположенных вблизи преобразователя, приходят раньше, чем эхо-сигналы от глубинных структур. Поперечная координата соответствует новому положению преобразователя, которое достигается либо механическим перемещением, либо в неявном виде электронным способом. Процесс сканирования продолжается до тех пор, пока исследуемая область не будет полностью содержаться в растре изображения.

Структурная схема простейшей УЗ системы, реализующей метод *B*-сканирования, представлена на рис. 4.1. Посылаемым устройством управления синхроимпульс запускает генератор высоковольтных импульсов, поступающих в конечном счете на пьезоэлементы приемно-излучательной системы, которые в свою очередь генерируют импульсы механической (акустической) энергии. Частота излучения УЗ импульсов, задаваемая устройством синхронизации, называется частотой повторения импульсов и обычно лежит в диа-

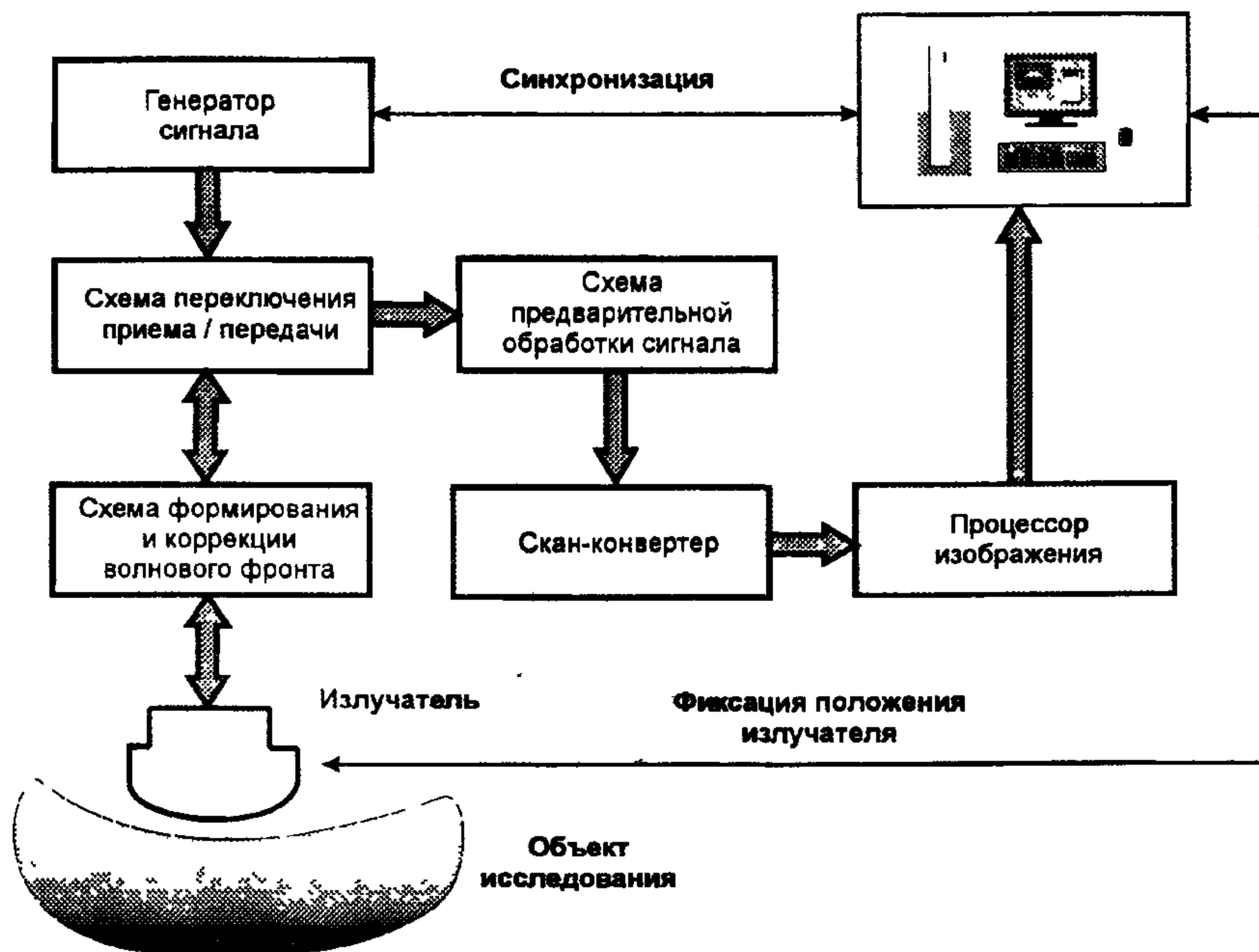


Рис. 4.1. Структурная схема В-сканера

пазоне 0,5 - 2,5 кГц. Генерируемые УЗ импульсы направляются в исследуемую область. Положение и угловая ориентация УЗ пучка контролируются при помощи электронных схем контроля положения пучка, которые задают положение развертки эхо-сигналов на экране монитора.

Современные УЗ сканеры оснащены быстродействующими электронными схемами переключения, позволяющими осуществлять защиту высокочувствительного приемного тракта от воздействия мощных импульсов, поступающих с выхода генератора сигнала на элементы приемно-излучательной системы. Эти схемы обеспечивают также более эффективное согласование электрических импедансов решетки преобразователей и усилителя приемной цепи по сравнению с применявшимися ранее диодными схемами пе-

реключения.

Характер диагностического исследования (сердечно-сосудистые, абдоминальные, чреспищеводные или другие исследования) определяет выбор конкретного типа приемно-излучательной системы. Излучатель может представлять собой, например, вращающийся или кольцевой преобразователь, линейную или секторную матрицу преобразователей и т.д. Функционирование УЗ сканера в многовариантном режиме обеспечивается наличием в его структуре схемы формирования и коррекции волнового фронта. В частности, для матрицы преобразователей данная схема обеспечивает управление n элементами матрицы, используя m каналов обработки данных. Для фазированных антенных решеток схема формирования и коррекции волнового фронта осуществляет динамическую коррекцию величин временных задержек электрических сигналов, подаваемых на каждый элемент решетки в процессе генерации импульса, а также необходимую обратную временную компенсацию при регистрации эхо-сигнала.

Акустические сигналы, отраженные от структур, расположенных по траектории УЗ пучка, возвращаются на преобразователь, преобразуются в электрические сигналы и поступают на вход схемы предварительной обработки. Эта схема включает блоки предварительного усиления, фильтрации и детектирования сигнала, устройства регулировки коэффициента усиления и компенсации динамического диапазона. Важной функцией схемы предварительной обработки является регулировка коэффициента усиления для компенсации поглощения сигнала в биотканях. Эта функция реализуется двумя способами. В первом способе используется умножитель с переменным коэффициентом усиления порядка 60 - 70 дБ, способный обеспечить диапазон 40 дБ при любом значении коэффициента усиления. Далее включается компрессор, уменьшающий выходной динамический диапазон с 40 до 20 - 30 дБ. При этом наиболее слабые эхо-сигналы преобразуются практически линейно. Во втором способе осуществляется логарифмическое сжатие полного динамического

ческого диапазона до 20 - 30 дБ, а затем добавление регулируемого постоянного смещения. Как в первом, так и во втором случае система должна автоматически вырабатывать управляющее напряжение, позволяющее отслеживать диапазон эхо-сигнала и изменять коэффициент усиления приемного тракта или величину постоянного смещения. Эта функция системы имеет несколько названий, среди которых наиболее распространены следующие: «временная регулировка усиления», «компенсация глубины усилением», «усиление по глубине» и некоторые другие. Для оценивания величины ослабления УЗ волны в биологических тканях можно использовать формулу

$$D \text{ [дБ]} \approx f \text{ [МГц]} \cdot z \text{ [см]},$$

где z - удаленность ткани от преобразователя. Так, если рабочая частота $f = 3$ МГц, глубина $z = 10$ см, то $D \approx 30$ дБ.

Основная задача скан-конвертера заключается в согласовании сеток дискретизации исходных, «сырых» данных (например, в полярной системе координат при секторном сканировании) и декартовой дискретизации на экране монитора. Такое согласование реализуется с помощью подходящей процедуры многомерной интерполяции (см. также § 5.4). Поскольку представление данных в скан-конвертере осуществляется в форме телевизионного изображения (с частотой, отличной от частоты формирования УЗ изображения), требуется дополнительное (цифровое) промежуточное запоминание (сохранение) УЗ информации непосредственно в скан-конвертере или в предшествующих блоках. Подобного рода сохранение может сопровождаться установлением корреляционных закономерностей в последовательности УЗ изображений и соответствующей коррекцией каждого нового изображения W_{i+1} посредством использования k -й части ранее сохраненного изображения W_i : $\tilde{W}_{i+1} = W_{i+1} + kW_i$, где \tilde{W}_{i+1} - скорректированное таким образом изображение (рис. 4.2).

Важной составной частью современного В-сканера является процессор изображения, который располагается между скан-конвертером и монитором и реализует различные алгоритмы ци-

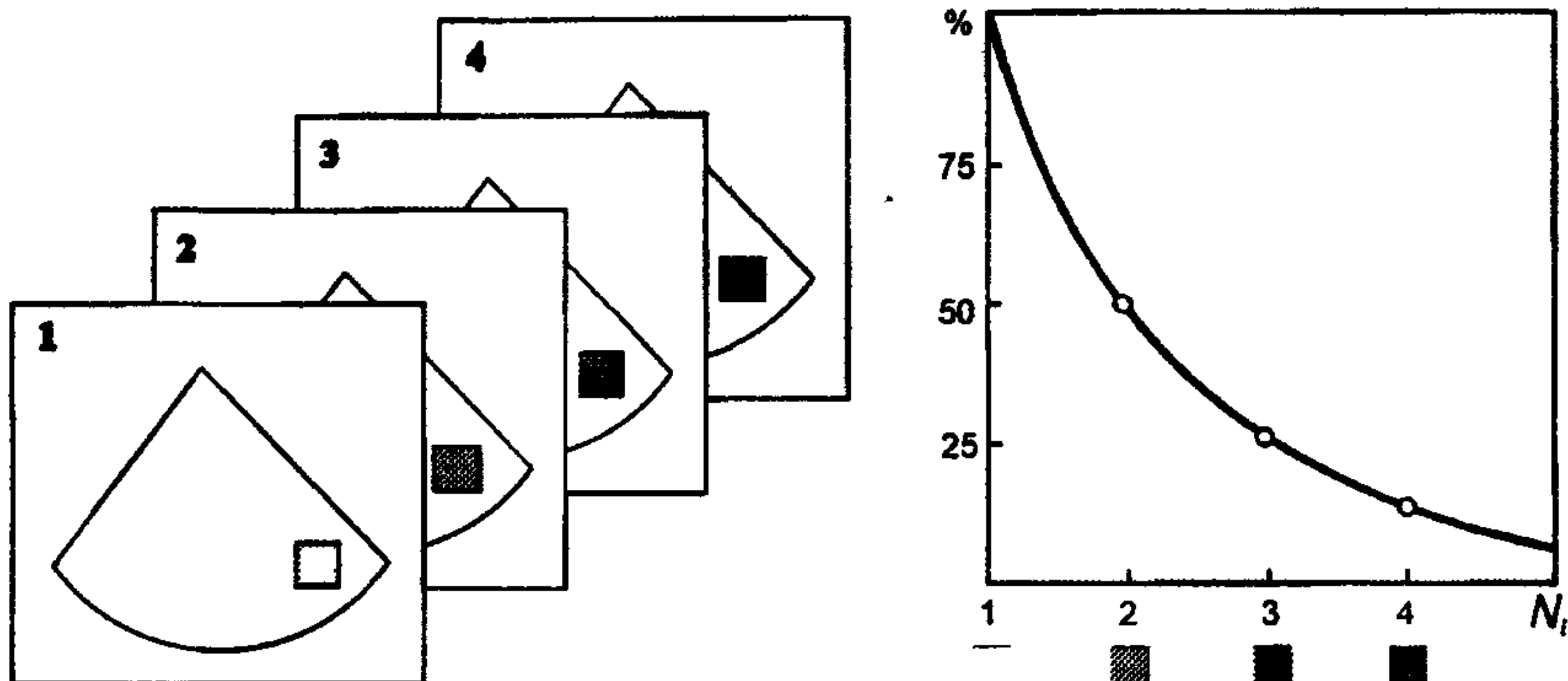


Рис. 4.2. Корреляционная коррекция УЗ изображения посредством усреднения промежуточных эхограмм

фровой обработки изображений (установка цветовых палитр, увеличение и уменьшение отдельных участков картинки, прорисовка контуров и т.д.), позволяющие обеспечить более достоверную интерпретацию диагностических УЗ изображений (рис. 4.3).



Рис. 4.3. Типичные УЗ изображения, полученные методом *B*-сканирования (с разрешения фирмы Shimadzu)

Отметим то обстоятельство, что, как и при интерпретации любых видимых изображений, успешная постановка диагноза на основании визуального анализа геометрических особенностей органов возможна только при накоплении врачом-диагностом достаточного практического опыта. Задача интерпретации сильно усложняется в случаях, когда аномальные ситуации выявляются на основании тонких деталей изображения. Таким образом, основная задача, стоящая перед разработчиком УЗ диагностической аппаратуры, состоит в улучшении ее качества. Среди главных требований к приборам можно отметить высокие значения разрешения и чувствительности приемно-излучательной системы, высокую точность пространственного сканирования, малые искажения эхо-сигнала, возможность формирования пространственных изображений, точность и воспроизводимость операций обработки сигналов и изображений.

4.3. Разрешающая способность при *B*-сканировании

При *B*-сканировании различают, как и следует ожидать, разрешающую способность метода в направлении движения преобразователя, называемую поперечной, и разрешающую способность в направлении распространения акустических импульсов, называемую продольной.

Поперечная разрешающая способность δ УЗ систем эхосканирования определяется по аналогии с линзовыми оптическими системами в соответствии с критерием Рэля:

$$\delta = \frac{1,22\lambda F}{D}, \quad (4.1)$$

где λ - длина волны излучения; F - фокусное расстояние системы и D - диаметр круглого входного зрачка. Применение критерия Рэля для случая двух некогерентных точечных источников связано с использованием функции Эйри: центр диска Эйри одного источника совмещается с первым нулем диска Эйри другого источника (рис. 4.4). Результирующее распределение интенсивности ха-



Рис 4.4. Применение критерия Рэля с использованием диаграмм Эйри: — — для случая двух самосветящихся точечных источников. — — — для задачи активной УЗ эхо-локации

характеризуется при этом 21%-ным провалом посередине между центрами дифракционных изображений двух источников. При сокращении расстояния между источниками провал будет уменьшаться, что приведет к невозможности различить источники. Такой подход соответствует характеристике системы, функционирующей в режиме пассивного наблюдения излучающих конфигураций, тогда как УЗ система с *B*-сканированием работает в активном режиме «излучение-прием». Это означает, что эффективный пространственный отклик системы УЗ визуализации определяется в случае точечного отражателя произведением диаграммы направленности излучателя на диаграмму направленности приемника. Так как излучение и прием УЗ сигнала производятся одним и тем же преобразователем, его эффективный пространственный отклик описывается кривой, полученной возведением диаграммы Эйри в квадрат. Нули двух функций на рис. 4.4 совпадают, но «квадратичная» характе-

ристка имеет более крутой наклон, чем исходная, что и обуславливает потенциальное увеличение разрешающей способности. Для фокусированного 2,5 МГц преобразователя диаметром 1,5 см поперечная разрешающая способность в соответствии с критерием (4.1) на фокусном расстоянии, например в 8 см, составляет в однородной жидкостно-подобной среде около 3,8 мм.

Разрешение вдоль луча (продольное разрешение) определяется в системах В-сканирования по времени прихода акустических эхосигналов. При этом продольная разрешающая способность практически не зависит от наличия или отсутствия фокусирующих элементов и определяется главным образом шириной полосы частот преобразователя: чем шире полоса частот, тем более коротким является УЗ импульс, который может быть излучен и принят системой. Для преобразователя с рабочей частотой 2,5 МГц при 70%-ной полосе частот продольная разрешающая способность составляет при сопоставимых условиях около 1,5 - 2 мм.

Для УЗ изображений характерны как мелкая текстура, т.е. близко расположенные тонкие элементы структуры, сильно отличающиеся по яркости, так и плавные изменения контраста. В последнем случае важное значение имеет разрешающая способность по контрасту, которая, в свою очередь, соотносится как с уровнем боковых лепестков в УЗ сигнале, так и с числом градаций серой шкалы. Если предположить, что область взаимодействия УЗ волны с исследуемой неоднородностью ограничивается областью, занимаемой главным и первым боковым лепестками, и что размер области неоднородности существенно превышает размер области взаимодействия, то контраст изображения IC («image contrast») на оси пучка можно принять равным контрасту изменений структуры ткани SC («structure contrast»):

$$SC = 20 \log \frac{R_i}{R_b}, \quad (4.2)$$

где R_i , R_b - коэффициенты отражения по давлению неоднородности и окружающей ткани. Что касается яркостной дискретизации изображения, то чем ниже пространственные частоты изображения,

тем больше требуется градаций яркости. Если число градаций яркости в изображении становится малым, то происходит так называемое ложное (субъективное) оконтуривание, когда глаз начинает воспринимать как контур участки со скачками яркости.

5. Волновая акустическая томография.

Линеаризованный вариант

5.1. Проекционные соотношения дифракционной томографии

Рассмотрим задачу определения количественных характеристик локализованной в среде неоднородности по данным о рассеянном ею акустическом поле, предположив, что это поле в пространстве и времени описывается в рамках модели линейной теории упругости. Более того, ограничимся изучением «скалярной» среды, в которой распространение акустических колебаний, вызываемых источниками с временной зависимостью $\exp(-j\omega_0 t)$, описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta U(\mathbf{r}, \omega_0) + k^2(\mathbf{r}, \omega_0)U(\mathbf{r}, \omega_0) = f(\mathbf{r}, \omega_0), \quad \mathbf{r} \in R^q, \quad q = 2, 3, \quad (5.1)$$

дополненным условиями сопряжения на поверхностях Γ разрыва коэффициента:

$$[U]_{\Gamma} = \left[\frac{\partial U}{\partial \nu} \right]_{\Gamma} = 0 \quad (\nu - \text{нормаль к } \Gamma) \quad (5.2)$$

и условиями излучения Зоммерфельда при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - jk_0 U = o\left(|\mathbf{r}|^{(1-q)/2}\right), \quad U(\mathbf{r}) = O\left(|\mathbf{r}|^{(1-q)/2}\right). \quad (5.3)$$

Здесь $U(\mathbf{r}, \omega_0)$ - спектральная амплитуда акустического поля в точке $\mathbf{r} \in R^q$ на частоте ω_0 ; $f(\mathbf{r}, \omega_0)$ - функция, характеризующая расположение, конфигурацию и плотность источников колебаний; $k(\mathbf{r}, \omega_0)$ - локальное волновое число, полностью определяющее акустическую неоднородность такой скалярной среды.

Сформулируем теперь задачу акустического томографического зондирования. Пусть финитный в пространстве R^q объект локализован в области $\mathcal{R} \subset R^q$, которая полностью содержится в шаре (в трехмерном варианте) или покрывается кругом радиуса D_{R_0} (в двумерном варианте). Пусть объект помещен в однородную среду, характеризуемую плотностью $\rho_0 = const$ и скоростью звука $c_0 = const$.

Для жидкостно-подобных сред акустический рассеиватель описывается в общем виде функцией

$$\xi(\mathbf{r}, \omega_0) = \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) + \frac{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}}{\omega_0^2} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right) - 2j \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)}{\omega_0 c(\mathbf{r})}. \quad (5.4)$$

где $c(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$ - локальные значения фазовой скорости звука и плотности среды в точке \mathbf{r} соответственно; $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$ - коэффициент поглощения. В этом случае уравнение (5.1) можно представить в виде

$$\Delta U(\mathbf{r}, \omega_0) + (k_0^2 - \omega_0^2 \xi(\mathbf{r}, \omega_0)) U(\mathbf{r}, \omega_0) = f(\mathbf{r}, \omega_0), \quad (5.5)$$

$$\mathbf{r} \in R^q, \quad q = 2, 3,$$

учитывая, что предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k(\mathbf{r}, \omega_0) = \frac{\omega_0}{c_0} = k_0 \quad (5.6)$$

существует и соответствует волновому числу для невозмущенной среды. Величина k_0 входит в (5.3)

От дифференциальной задачи (5.2), (5.3), (5.5) удобно перейти к интегральным уравнениям. Для этого рассмотрим функцию Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = \begin{cases} -\exp(jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) & \text{при } q = 3, \\ -\frac{1}{4}H_0^{(1)}(k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) & \text{при } q = 2, \\ -\exp(jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/2 & \text{при } q = 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

являющуюся решением уравнения Гельмгольца с коэффициентом $k_0 = \omega_0/c_0$ и δ -образной правой частью

$$\Delta_r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) + k_0^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.8)$$

В уравнении (5.5) перенесем член $\omega_0^2 \xi(\mathbf{r}, \omega_0) U(\mathbf{r}, \omega_0)$ в правую часть и, предположив, что свертка суммы $f + \omega_0^2 \xi(\mathbf{r}, \omega_0) U(\mathbf{r}, \omega_0)$ с функцией Грина существует, получим интегральную форму уравнения рассеяния:

$$U(\mathbf{r}, \omega_0) = U_0(\mathbf{r}, \omega_0) + \omega_0^2 \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) \xi(\mathbf{r}', \omega_0) U(\mathbf{r}', \omega_0) d\mathbf{r}', \quad (5.9)$$

$$\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in R^q,$$

где

$$U_0(\mathbf{r}, \omega_0) = \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) f(\mathbf{r}', \omega_0) d\mathbf{r}'. \quad (5.10)$$

Рассмотрим сначала случай двумерного акустического рассеяния. Строго говоря, приближенное сведение задачи реконструкции реальной трехмерной структуры к двумерной обратной задаче возможно лишь в борновском приближении однократного рассеяния (см. ниже) посредством послойного (томографического в классическом смысле) восстановления изображения с использованием сильно сжатого по третьей координате волнового пучка при условии, что функция неоднородности является медленно изменяющейся вдоль этой координаты. Тем не менее, существует определенный класс задач, в которых физическая картина распространения и рассеяния волн может быть вполне адекватна двумерной рассматриваемой в дифракционной томографии. К этому классу относятся задачи, связанные с распространением различных типов волн на поверхностях раздела двух сред (при ряде дополнительных ограничений на физические условия постановки эксперимента), изгибных волн в пластинах, а также волн в плоских волноводах в условиях одномодового распространения.

Предположим, что плотность является величиной постоянной, $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$ везде в R^2 и поглощение звуковой волны в среде распространения отсутствует, т.е. $\alpha(\mathbf{r}) = 0$. Тогда акустический рассеиватель характеризуется на области \mathcal{R} лишь возмущениями фазовой

скорости звука $c(\mathbf{r})$:

$$\xi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}, & \mathbf{r} \in \mathcal{R}, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathcal{R}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Теперь рассмотрим задачу нахождения кусочно-гладкой функции $\xi(\mathbf{r})$ вида (5.11) с носителем в \mathcal{R} из интегрального уравнения (5.9) по данным $U(\mathbf{r}, \omega_0)$, измеренным в некоторой области, не пересекающейся с \mathcal{R} . Эту задачу назовем обратной задачей рассеяния (ОЗР) рефракционного типа.

Пусть положение объекта фиксировано в пространстве, а облучение исследуемой области производится плоскими волнами

$$U_0(\mathbf{r}, \omega_0) = U_0 \exp\left\{j \frac{\omega_0}{c_0} \mathbf{r}\right\} \quad (5.12)$$

с различных направлений, задаваемых набором волновых векторов $\{\mathbf{k}_0^\alpha : \mathbf{k}_0^\alpha = k_0 \mathbf{s}_0^\alpha\}$, где $\mathbf{s}_0^\alpha = \mathbf{s}_0(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ - единичный вектор (рис. 5.1). Свяжем с неподвижным объектом систему координат (x, y) . Пусть рассеянное поле регистрируется линейной матрицей приемников с конечной апертурой D_A , расположенной на расстоянии l_0 от начала системы координат, причем радиус-вектор \mathbf{s} , направленный к центру решетки, перпендикулярен линии L_r , на которой она располагается. Предположим также, что $D_A \gg 2R_0$, $l_0 \gg R_0$.

Если допустить независимое вращение приемной апертуры вокруг начала системы координат и вращение антенной решетки излучателей, с помощью которой формируются плоские волны (5.12), то в рамках приведенных ограничений можно учесть многие из возможных вариантов томографических экспериментов, в том числе ориентированных на диагностику движущихся сред (см. гл. 8).

Введем единичный вектор $\mathbf{s}_0^{\alpha\perp} = \mathbf{s}_0^\perp(\alpha) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$, ортогональный вектору \mathbf{s}_0^α . Предположим, что для любого вектора $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathcal{R} \subset D_{R_0}$ выполнено условие

$$\left\| \frac{u(\mathbf{r}, \omega_0)}{U_0(\mathbf{r}, \omega_0)} \right\| \ll 1, \quad (5.13)$$

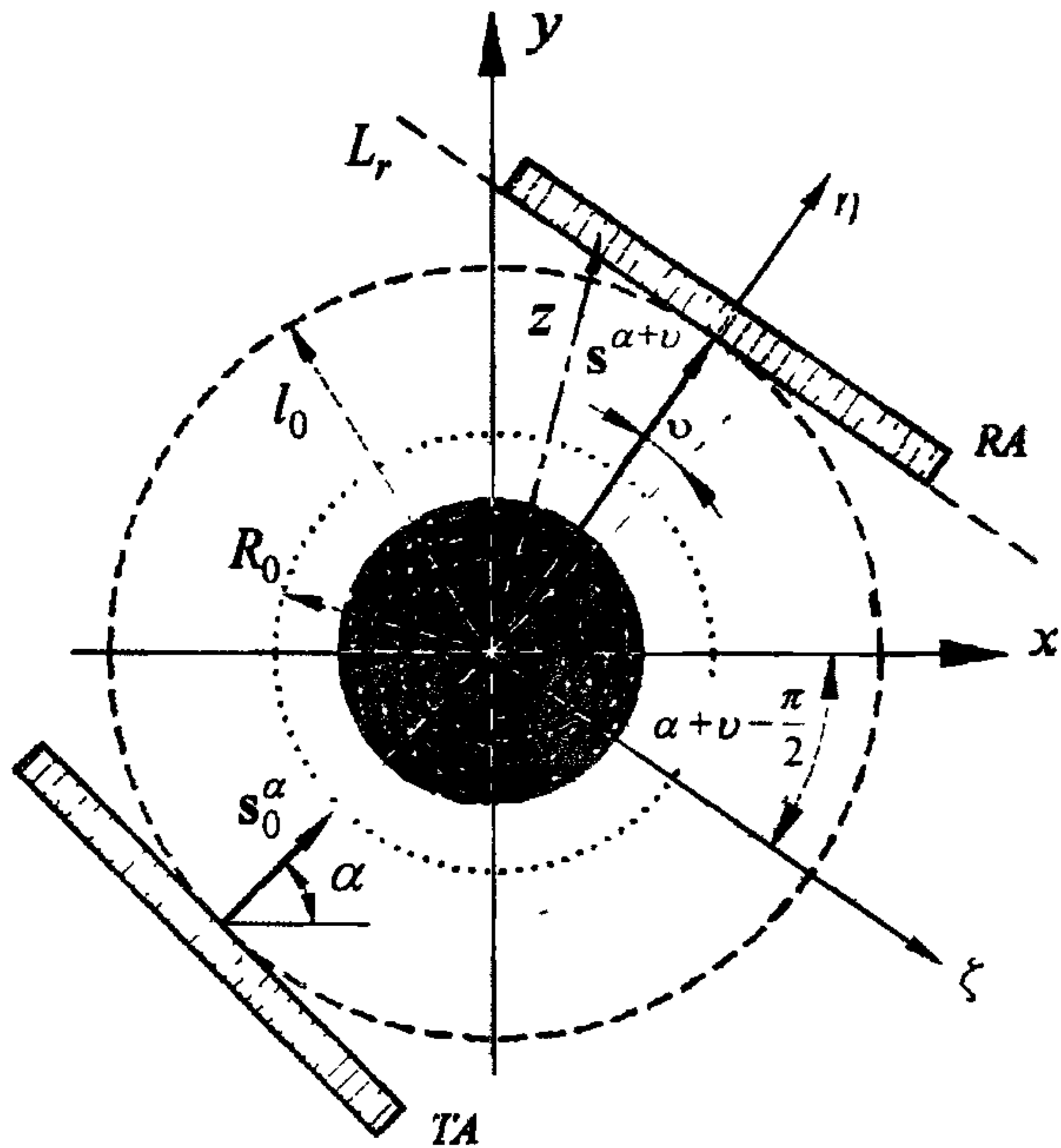


Рис 5.1. Геометрия томографического эксперимента по определению скалярной акустической неоднородности. Реконструируемая область облучается плоскими волнами, формируемыми антенной решеткой преобразователей TA , с различных направлений \mathbf{s}_0^α . Амплитуды и фазы рассеянного поля регистрируются линейной матрицей приемников RA .

соответствующее малости рассеянного поля $u(\mathbf{r}, \omega_0)$ по сравнению с $U_0(\mathbf{r}, \omega_0)$ в каждой точке \mathcal{R} . Как будет показано ниже, соотношение (5.13) является условием однократного рассеяния и влечет за собой линеаризованную относительно $\xi(\mathbf{r})$ постановку задачи акустического зондирования. С учетом (5.13) рассеянное поле $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ (\mathcal{Z} - область приема, не пересекающаяся с \mathcal{R}), регистрируемое на линии приема $L_r: l_0 \mathbf{s}_0(\alpha + \nu) + \zeta$, где ν - угол, образуемый векто-

рами \mathbf{s}_0 и \mathbf{s} , а ζ - координата точки наблюдения на L_r , может быть вычислено с помощью выражения

$$u(\mathbf{z}) = \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{z}, \mathbf{r}, k_0) \epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) U_0(\mathbf{r}, \omega_0) d\mathbf{r}, \quad (5.14)$$

в котором функция Грина задана в соответствии с (5.7) в виде

$$G(\mathbf{z}, \mathbf{r}) = -\frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|). \quad (5.15)$$

В (5.14) и (5.15) использованы следующие обозначения: $\epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) = \omega_0^2 \xi(\mathbf{r})$ - функция неоднородности; $H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|)$ - функция Ганкеля нулевого порядка первого рода. Следует отметить то обстоятельство, что $\epsilon(\mathbf{r}, \omega_0) = \omega_0^2 \xi(\mathbf{r})$ характеризуется мультипликативным вхождением величины ω_0^2 , что находит свое отражение в структуре томографических данных рассеяния.

В системе координат (ζ, η) , повернутой относительно системы (x, y) на угол $(-\alpha - \vartheta)$, вектор $\mathbf{z} - \mathbf{r} = l_0 \mathbf{s}_0(\alpha + \vartheta) + \zeta \mathbf{s}_0^\perp(\alpha + \vartheta) - \mathbf{r}$ имеет координаты $(l_0 - x \cos(-\alpha - \vartheta) + y \sin(-\alpha - \vartheta), \eta - x \sin(-\alpha - \vartheta) - y \cos(-\alpha - \vartheta))$. Тогда значения рассеянного поля (5.14) в точках приема ζ на линии L_r , отстоящей на расстоянии l_0 от центра неподвижной системы координат, связанной с объектом, могут быть вычислены по формуле

$$u_{l_0}(\zeta, \mathbf{s}_0^\alpha) = -\frac{j\omega_0^2 U_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\mathcal{R}} \xi(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \exp\{j\beta\zeta\} \times \quad (5.16)$$

$$\times \exp\{jk_0 \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{r}\} \exp\{j\sqrt{k_0^2 - \beta^2}(l_0 - \mathbf{s}^{\alpha+\vartheta} \mathbf{r})\} \exp\{j\beta \mathbf{s}_\perp^{\alpha+\vartheta} \mathbf{r}\} d\mathbf{r} d\beta,$$

где β - линейная координата пространственного спектра проекции, причем $\sqrt{k_0^2 - \beta^2} > 0$, если $|\beta| < k_0$ и $Im \sqrt{k_0^2 - \beta^2} > 0$, если $|\beta| > k_0$, что физически соответствует исключению из рассмотрения неоднородных волн, убывающих в дальней зоне.

Выполнив преобразование Фурье в обеих частях (5.16) и распространив интегрирование на все пространство R^2 , получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) = & -\frac{j\omega_0^2 U_0}{2\gamma} \exp\{j\gamma l_0\} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x, y) \times \\ & \times \exp\{-j[\gamma \cos(\alpha + \vartheta) - \beta \sin(\alpha + \vartheta) - k_0 \cos(\alpha)]x\} \times \\ & \times \exp\{-j[\gamma \sin(\alpha + \vartheta) + \beta \cos(\alpha + \vartheta) - k_0 \sin(\alpha)]y\} dx dy, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где тильда обозначает соответствующий фурье-образ. С учетом того, что интегрирование в (5.17) соответствует двумерному преобразованию Фурье функции $\xi(x, y)$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}[(\gamma - k_0 \cos \vartheta \mathbf{s}_0(\alpha + \vartheta) + (\beta + k_0 \sin \vartheta) \mathbf{s}_0^\perp(\alpha + \vartheta))] = \\ = \frac{j2\gamma}{\omega_0^2 U_0} \exp\{-j\gamma l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Пусть направление радиус-вектора \mathbf{s} , характеризующего положение приемной апертуры L_r , фиксировано в пространстве и совпадает с направлением оси y , т.е. L_r перпендикулярна y (рис. 5.2).

Если величина угла α изменяется в пределах $[0, \pi]$, то, учитывая, что для данной схемы справедливо равенство $\alpha + \vartheta = \pi/2$, значения пространственных компонент $\tilde{\xi}$ следует определять по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}[(\gamma - k_0 \sin \alpha) \mathbf{s}_0(\frac{\pi}{2}) + (\beta + k_0 \cos \alpha) \mathbf{s}_0^\perp(\frac{\pi}{2})] = \\ = \frac{j2\gamma}{\omega_0^2 U_0} \exp\{-j\gamma l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha), \end{aligned} \quad (5.19)$$

или, в других обозначениях,

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(-\beta - k_0 \cos \alpha, \sqrt{k_0^2 - \beta^2} - k_0 \sin \alpha) = \\ = \frac{j2\sqrt{k_0^2 - \beta^2} - k_0 \sin \alpha}{U_0} \exp\{-j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Введем дополнительно к системе координат (x, y) систему (ζ, η) в R -пространстве. Пусть нули этих систем совпадают, причем, если система (x, y) связана с объектом, то система (ζ, η) ориентирована таким образом, что направление оси η совпадает с направлением

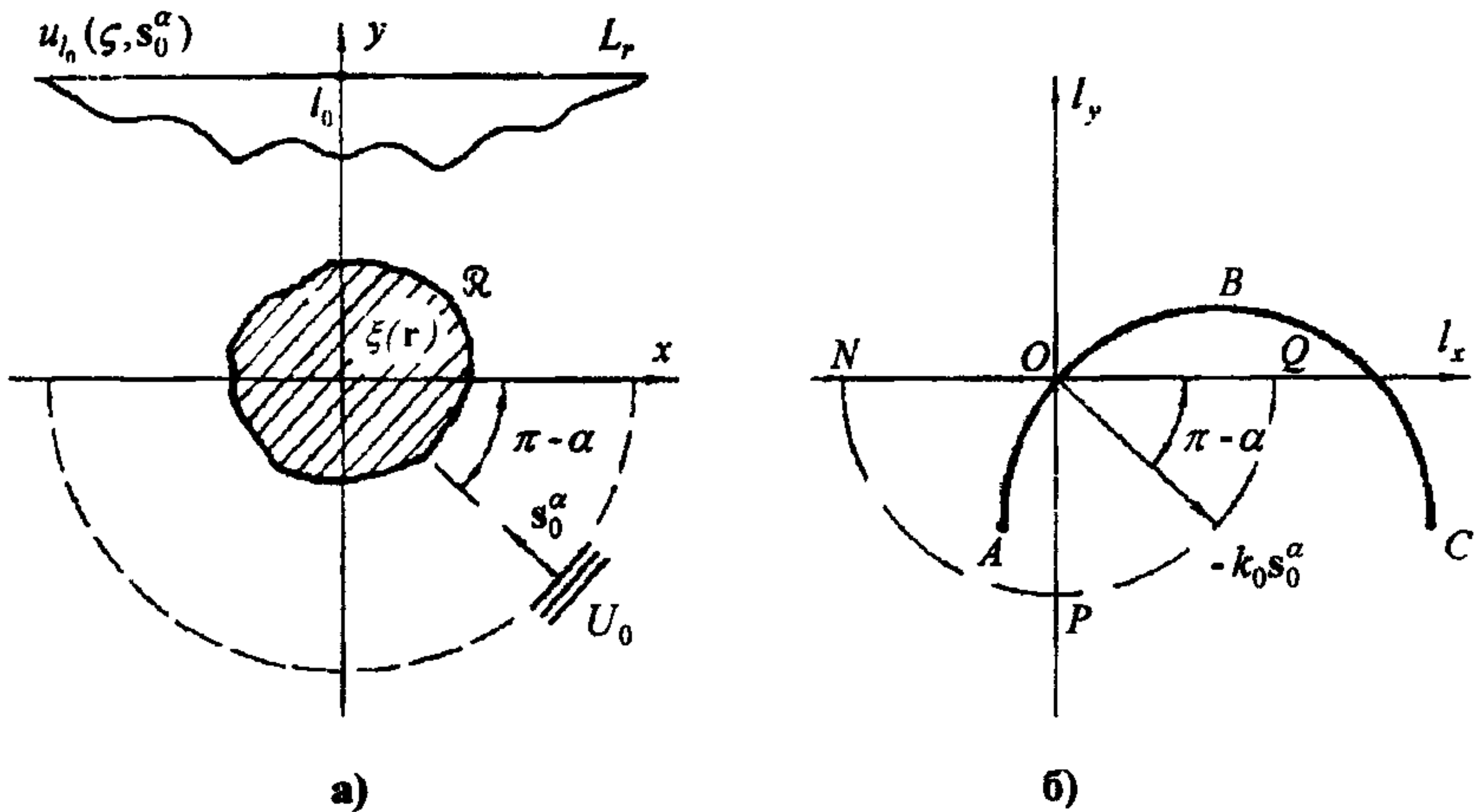


Рис. 5.2. Схема сбора томографических данных с фиксированной линейной приемной апертурой (а) и геометрическое место компонент пространственного спектра неоднородности, поддающихся определению с помощью проекционных соотношений (б)

вектора \mathbf{s}_0^α для любого α . Рассмотрим такую схему регистрации данных, когда направления векторов \mathbf{s}_0^α и \mathbf{s} совпадают для любого α , причем начало системы координат (x, y) является центром поворота приемно-излучательной системы (рис. 5.3). В рамках данной схемы ($\vartheta = 0$) уравнение (5.18) переписывается в следующем виде:

$$\tilde{\xi}[(\gamma - k_0)\mathbf{s}_0(\alpha) + \beta\mathbf{s}_0^\perp(\alpha)] = \frac{j^2\gamma}{\omega_0^2 U_0} \exp\{-j\gamma l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha), \quad (5.21)$$

либо, по аналогии с (5.20),

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(\gamma \cos \alpha - \beta \sin \alpha - k_0 \cos \alpha, \gamma \sin \alpha + \beta \cos \alpha - k_0 \sin \alpha) = \\ = \frac{j^2 \sqrt{k_0^2 - \beta^2}}{U_0} \exp\{-j \sqrt{k_0^2 - \beta^2} l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Выражения (5.20) и (5.22) являются общими и составляют основу проекционных алгоритмов современной дифракционной то-

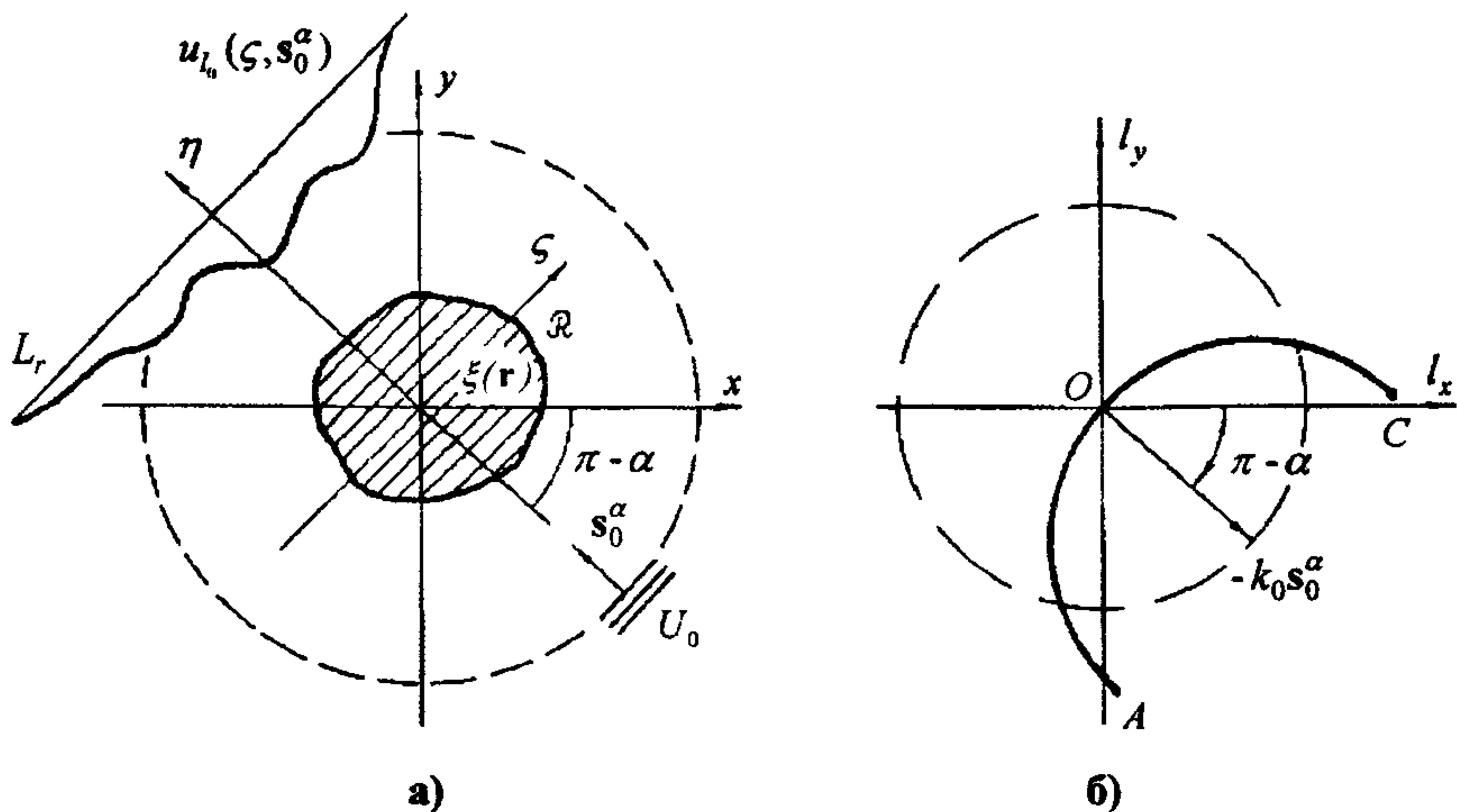


Рис. 5.3. Схема сбора томографических данных с согласованной приемно-излучательной системой (а) и геометрическое место компонент пространственного спектра неоднородности, поддающихся определению с помощью проекционных соотношений (б)

мографии. Уравнение (5.20) используется в том случае, когда положение приемной апертуры фиксировано (т.е. фиксировано направление радиус-вектора \mathbf{s}), а облучение объекта осуществляется с различных направлений. Что же касается уравнения (5.22), то, как видно из предшествующего изложения, с его помощью можно выполнить реконструкцию неоднородности в таких схемах съема данных, в которых приемная и передающая апертуры перпендикулярны направлению распространения поля (направления векторов \mathbf{s}_0^α и \mathbf{s} совпадают) и совместно вращаются вокруг объекта. И в том, и в другом случае имеется в виду, что сам объект остается неподвижным. Заметим, однако, что формулы (5.20) и (5.22) не изменятся, если предположить, что направление лоцирования \mathbf{s}_0^α фиксировано, а объект совершает поворот вокруг начала системы координат.

5.2. Структура спектральных томографических данных: проекционный подход

В § 5.1 были получены проекционные соотношения (5.20) и (5.22), связывающие образ Фурье рассеянного поля, зарегистрированного на некоторой линейной приемной апертуре с выборкой двумерного пространственного спектра реконструируемой неоднородности $\epsilon(\mathbf{r})$. Используя эти соотношения, проанализируем структуру получаемых в импульсном пространстве данных отдельно для каждой из схем томографического эксперимента.

Из уравнения (5.20) следует, что геометрическим местом точек в K -пространстве, в которых фурье-образ рассеянного поля $\tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha)$, измеренного в схеме с фиксированной апертурой (см. рис. 5.2, а), совпадает с выборкой компонент двумерного пространственного спектра неоднородности $\tilde{\epsilon}(l_x, l_y)$, является полуокружность (см. рис. 5.2, б). Центр полуокружности смещен из начала декартовой системы координат (l_x, l_y) в направлении $-\mathbf{s}_0^\alpha$ (здесь параметр α фиксирован) на расстояние k_0 . Хорда AC , на которую опирается полуокружность, ориентирована таким образом, что образует прямой угол с осью l_y , что является следствием перпендикулярности линии L_r оси y в R -пространстве.

Пусть облучение исследуемой области \mathcal{R} осуществляется с некоторого набора направлений $\{\mathbf{s}_0^\alpha\}$. Экспериментально это может достигаться вращением линейной системы излучателей вокруг объекта. В пространстве Фурье этому случаю будет соответствовать набор полуокружностей, центры которых расположены на дуге NPQ , причем точка N является центром полуокружности при облучении объекта слева в плоскости рисунка, точка P - при облучении вдоль направления оси y , точка Q - при облучении в направлении, противоположном положительному направлению оси x .

На рис. 5.4 представлена структура данных, на основании которых осуществляется реконструкция $\epsilon(\mathbf{r})$ в томографических установках с фиксированным положением приемной матрицы.

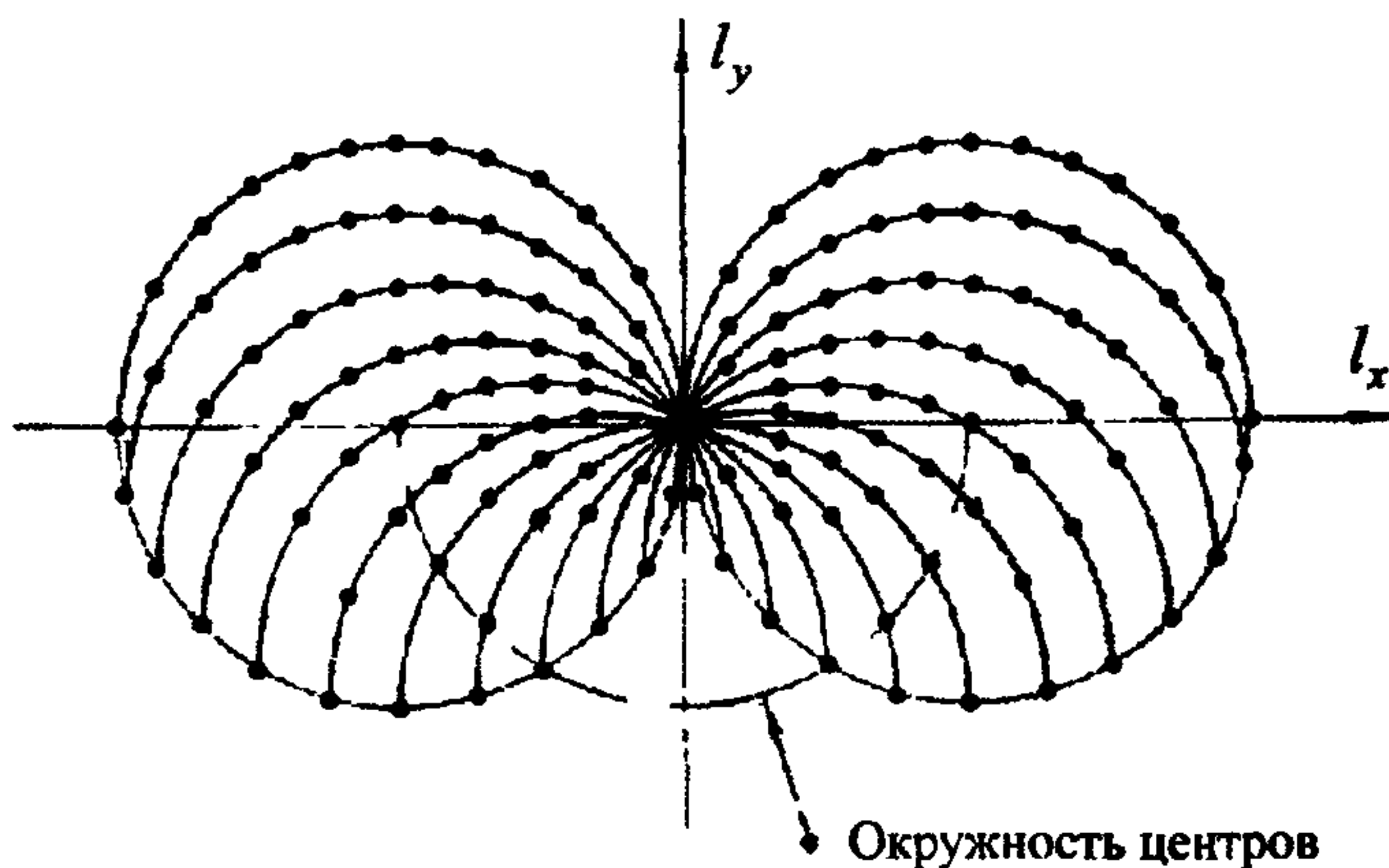


Рис. 5.4. Структура томографических данных в пространстве Фурье для схемы с фиксированной приемной апертурой

Из рисунка видно, что, имея набор $\{s_0^\alpha\}$ в диапазоне углов α от 0 до π , можно, пользуясь формулой (5.20), вычислить значения пространственного спектра $\tilde{\epsilon}(\Lambda)$ в точках, принадлежащих двум круговым областям D_1 и D_2 .

Недостающая информация о $\tilde{\epsilon}(\Lambda)$ может быть восполнена применением методов цифровой обработки изображений, позволяющих в рамках рассматриваемых задач учитывать априорные сведения об области локализации рассеивателя, пределы вариации функции неоднородности $\epsilon(\mathbf{r})$ и другие заранее известные факторы. В настоящее время существует достаточно много различных алгоритмов обработки изображений, однако их изложение выходит за рамки данного пособия. Для более подробного ознакомления см., например, [18], [4].

Недостающие сведения в рассматриваемой схеме могут быть получены путем поворота объекта на 90° в том или ином направлении либо перемещением приемной апертуры на линию L_r и повторением в полном объеме прежнего томографического эксперимента.

В импульсном пространстве этому случаю соответствует появление двух новых дисковых областей D_3 и D_4 (рис. 5.5), что эквивалентно получению полной информации о $\tilde{\epsilon}(\Lambda)$ в круге радиуса $\sqrt{2}k_0$.

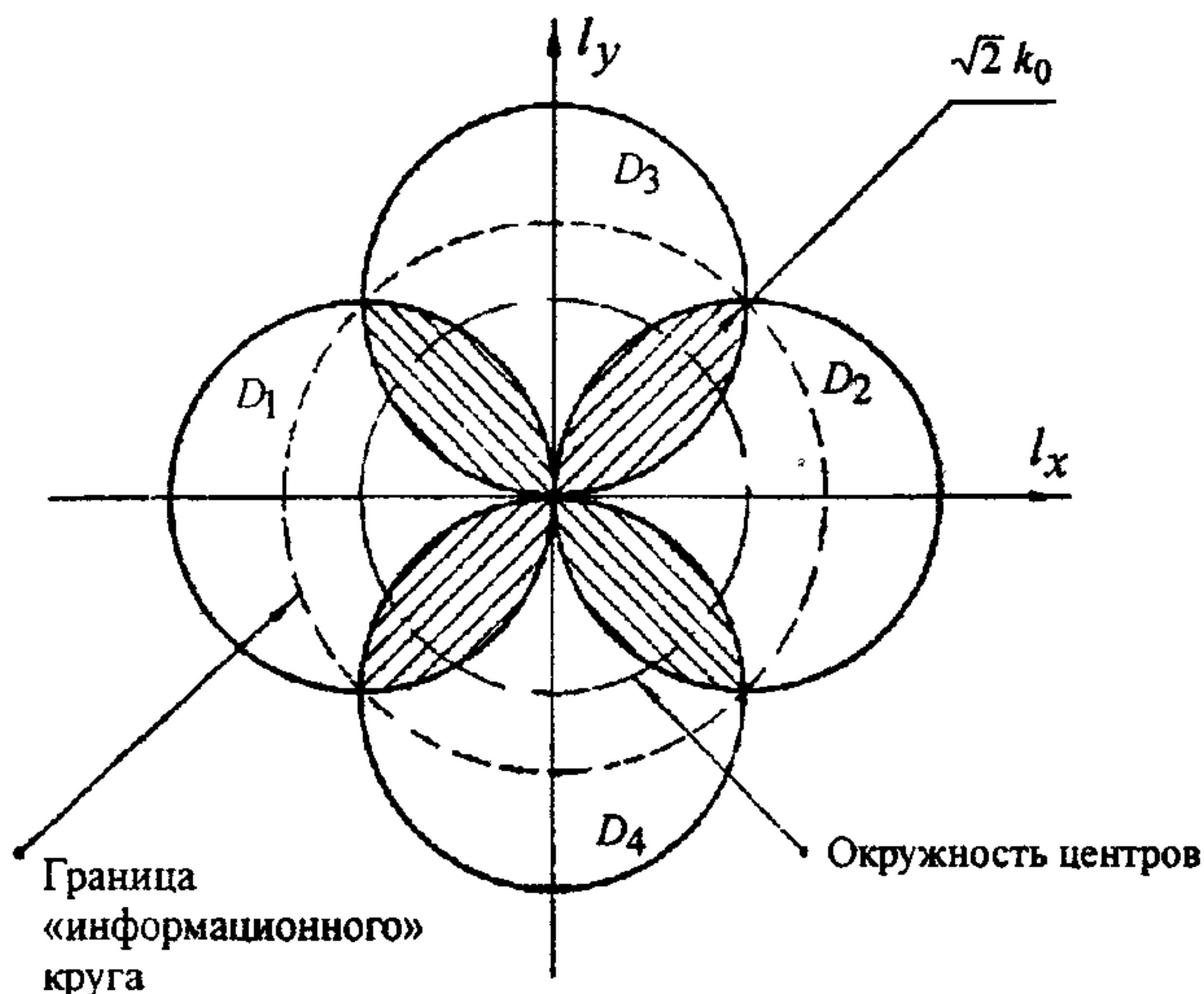


Рис. 5.5. Заполнение области пространственных частот в томографических схемах с синтезированной апертурой

Важно отметить, что этот алгоритм, как и большинство томографических алгоритмов, базируется на допущении об ограничении пространственного спектра реконструируемого изображения областью $l_x^2 + l_y^2 \leq k_{max}^2$, где $k_{max} = \sqrt{2}k_0$. Поэтому не следует упускать из вида, что в томографических методах реконструкции осуществляется восстановление не исходного объекта $\epsilon_0(x, y)$, а его отфильтрованного в полосе частот $l_x^2 + l_y^2 \leq k_{max}^2$ изображения

$$\epsilon(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(x', y') \frac{J_1(2\pi k_{max} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2})}{\pi k_{max} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy'. \quad (5.23)$$

Такая «подмена» объекта реконструкции традиционна для многих физически реализуемых процессов, в частности, для оптики,

где фильтрация (5.23) соответствует формированию когерентного изображения идеальным объективом с круглой апертурой конечных размеров. Безусловно, преобразование (5.23) ограничивает возможности изучения объекта $\xi_0(x, y)$ по его изображению $\xi(x, y)$, так как все высокочастотные компоненты спектра $\tilde{\xi}(\Lambda)$ вне области $l_x^2 + l_y^2 \leq k_{max}^2$ и содержащаяся в них информация безвозвратно потеряны.

Тем не менее, во многих случаях при правильном выборе величины k_{max} такие фильтрованные изображения объектов воспринимаются как высококачественные. В подтверждение этого можно назвать множество примеров из опыта визуализации, фотографии, астрономии, а теперь и вычислительной томографии. В то же время фильтрация (5.23) приводит к ряду следствий, важных для построения эффективных алгоритмов реконструкции при решении ОЗР методами вычислительной томографии. Эти следствия имеют отношение прежде всего к проблемам дискретизации и интерполяции и будут рассматриваться в § 5.4.

Перейдем к анализу структуры данных для схемы с согласованной приемно-излучательной системой (см. рис. 5.3). Фурье-образу рассеянного поля $\tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha)$ в такой схеме соответствует, как видно из (5.22), выборка значений пространственного спектра неоднородности $\tilde{\epsilon}[(\gamma - k_0)\mathbf{s}_0(\alpha) + \beta\mathbf{s}_0^\perp(\alpha)]$. В системе координат (l_x, l_y) импульсного пространства \mathcal{L} геометрическим местом аргументов $(\gamma - k_0)\mathbf{s}_0(\alpha) + \beta\mathbf{s}_0^\perp(\alpha)$, поддающихся определению компонент $\tilde{\epsilon}(\Lambda)$, является полуокружность, аналогично тому, как это было в рассматривавшемся ранее варианте. Центр полуокружности также смещен из начала системы координат (l_x, l_y) на расстояние k_0 в направлении $-\mathbf{s}_0^\alpha$. Однако, в отличие от схемы с фиксированной апертурой, ориентация хорды AC , на которую опирается данная полуокружность, изменяется. Каждому фиксированному углу поворота приемно-передающей системы соответствует вполне определенное направление вектора \mathbf{s} , а значит, ориентация хорды AC . При изменении угла поворота α в диапазоне от 0 до 2π полуокружность со-

вершает полный поворот вокруг начала системы координат (l_x, l_y) . Множество поддающихся определению в такой системе съема данных компонент $\tilde{\epsilon}(\Lambda)$ показано на рис. 5.6.

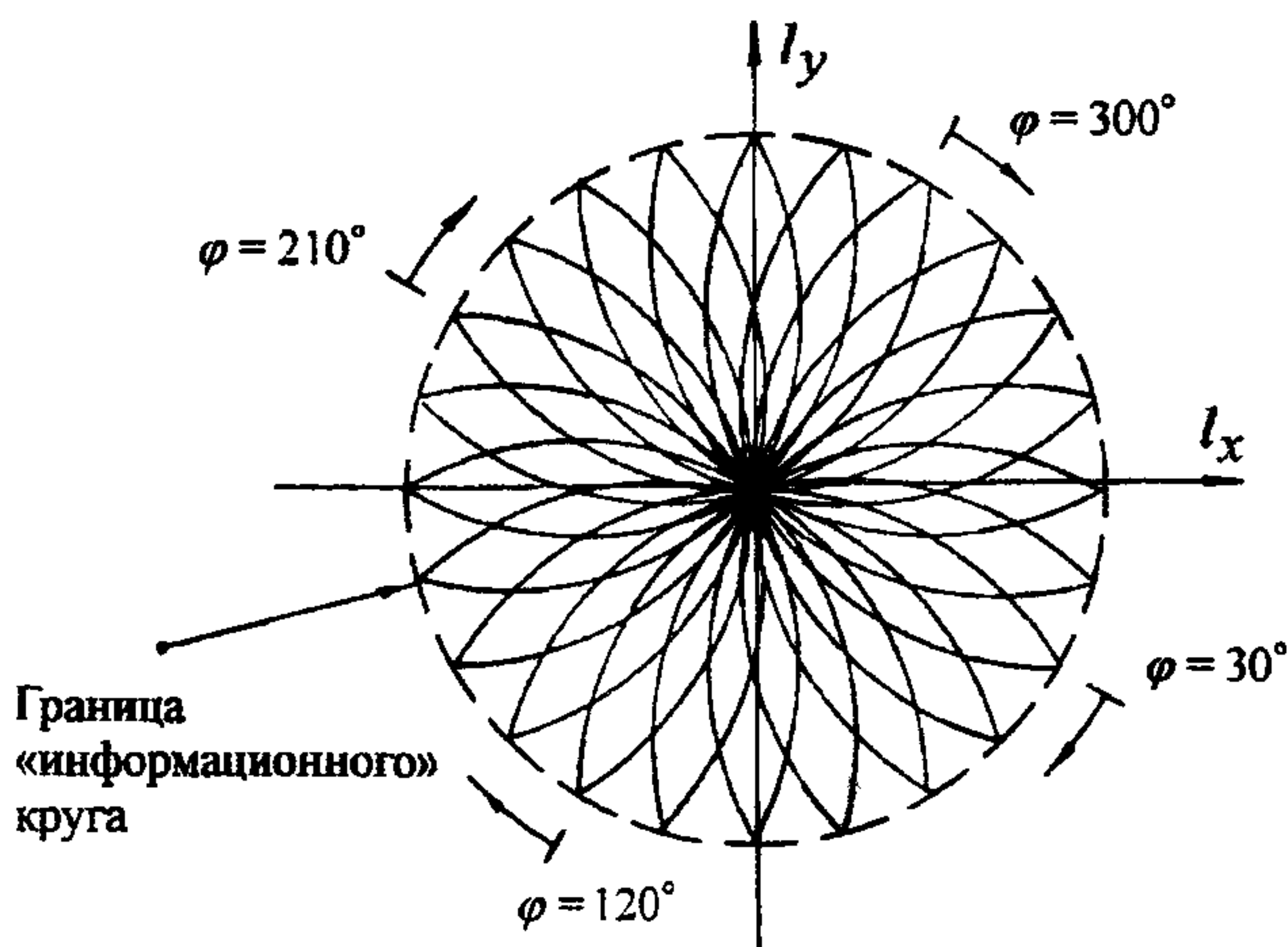


Рис 5.6 Структура томографических данных в пространстве Фурье для схемы с согласованной приемно-излучательной системой

Итак, применение проекционных соотношений (5.20) и (5.22) для обработки томографических данных в схемах многопозиционного (многокурсового) сканирования обеспечивает определение компонент пространственного спектра неоднородности $\tilde{\epsilon}(\Lambda)$ на полуокружностях в круге радиуса $\sqrt{2}k_0$. Конфигурация полуокружностей и их взаимное расположение внутри «информационного» круга определяются конкретными схемами съема данных, а именно, вычисляются подстановкой соответствующих значений α и ϑ в (5.18).

5.3. Структура спектральных томографических данных:

T-матричный подход

Применим для анализа структуры томографических данных

вида (5.20) и (5.22) T -матричный формализм обратной задачи. Запишем уравнение (5.9) в виде

$$U(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = U_0(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{z}, \mathbf{r}, k_0) \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) d\mathbf{r}, \quad (5.24)$$

где $U(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ - полное поле на области рассеяния ($\mathbf{r} \in \mathcal{R}$) и $U(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ - полное поле на области приема ($\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$). В дальней зоне асимптотическая аппроксимация $u(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = U(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) - U_0(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ с учетом разложения функции Ганкеля нулевого порядка первого рода $H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \sim (2/\pi k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|)^{1/2} \exp\{j[k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}| - \pi/4]\}$ задается соотношением

$$u(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = -j \sqrt{\frac{1}{8\pi z k_0}} \exp\left\{-j\frac{\pi}{4}\right\} \exp\{j k_0 \mathbf{s}^\beta z\} f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha), \quad (5.25)$$

в котором амплитуда рассеяния $f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ определяется выражением

$$f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} \exp\{-j k_0 \mathbf{s}^\beta \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) d\mathbf{r}, \quad (5.26)$$

и единичный вектор \mathbf{s}^β характеризует направление рассеяния. Несмотря на борновский вариант задачи, полное поле в (5.24) преднамеренно не заменено на $U_0(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$, поскольку определение амплитуды рассеяния в форме (5.26) имеет универсальный характер. В трехмерном случае выражение (5.25) имеет вид

$$u(\mathbf{z}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \exp\{j k_0 z / 4\pi z\} f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha). \quad (5.27)$$

Пусть функция $\xi(\mathbf{r})$, заданная в виде (5.11), принадлежит классу L_2 . Определим на \mathcal{R} для любого параметра α функцию

$$T(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha). \quad (5.28)$$

Функция $T(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ описывает источники вторичного излучения на \mathcal{R} , образованные в результате взаимодействия падающего поля

$U_0(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ с неоднородностями среды $\epsilon(\mathbf{r})$. Поскольку функция $\epsilon(\mathbf{r})$ финитна на компакте \mathcal{R} , то функция $T(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ также является финитной для любого фиксированного α , причем область локализации $T(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ совпадает с \mathcal{R} .

Введем обозначение:

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha) \equiv \int_{\mathcal{R}} \exp\{-j\mathbf{k}\mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) d\mathbf{r} - \quad (5.29)$$

матрица рассеяния, характеризующая рассеянное поле в направлении $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ при падении поля $U_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)$ в направлении \mathbf{s}_0^α . Из (5.29) следует, что для каждого α функция $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha)$ является образом Фурье вторичных источников $T(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$. Причем экспериментальному определению поддаются только те компоненты T -матрицы, которые соответствуют излучающим источникам в спектре рассеяния, а именно, удовлетворяется условие $|\mathbf{k}| = k_0$. Понятно, что в пространстве волновых векторов \mathcal{K} , характеризующем рассеянные волны, этому случаю соответствуют амплитуды рассеяния на сферической оболочке, называемой поверхностью Эвальда. Для двумерной задачи такой поверхностью является окружность радиуса k_0 .

В борновском приближении однократного рассеяния выражение для функции $T^{(B)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha)$ имеет вид

$$T^{(B)}(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \epsilon(\mathbf{r}) \exp\{jk_0 \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{r}\}, \quad (5.30)$$

где параметр α фиксирован, а $U_0 = 1$.

С учетом (5.30) выражение (5.17) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) = & -\frac{j}{2\gamma} \exp\{j\gamma l_0\} \int_{R^2} T^{(B)}(x, y, \mathbf{s}_0^\alpha) \times \\ & \times \exp\{-j[\gamma \cos(\alpha + \vartheta) - \beta \sin(\alpha + \vartheta)]x\} \times \\ & \times \exp\{-j[\gamma \sin(\alpha + \vartheta) + \beta \cos(\alpha + \vartheta)]y\} dx dy. \end{aligned} \quad (5.31)$$

По аналогии с (5.18) будем иметь

$$T^{(B)}(\gamma \mathbf{s}_0(\alpha + \vartheta) + \beta \mathbf{s}_0^\perp(\alpha + \vartheta)) = j2\gamma \exp\{-j\gamma l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha). \quad (5.32)$$

Сравнив (5.18) и (5.32), получим борновский вариант уравнения рассеяния для акустических обратных задач томографического типа

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}[(\gamma - k_0 \cos \alpha) \mathbf{s}_0(\alpha + \vartheta) + (\beta + k_0 \sin \vartheta) \mathbf{s}_0^\perp(\alpha + \vartheta)] = \\ = T^{(B)}(\gamma \mathbf{s}_0(\alpha + \vartheta) + \beta \mathbf{s}_0^\perp(\alpha + \vartheta)). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Пусть \mathcal{K} - пространство волновых векторов, характеризующих рассеянные волны, а \mathcal{K}_0 - пространство волновых векторов падающих полей. Из (5.20) и (5.22) следует, что реконструируемые пространственные частоты

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} \epsilon(\mathbf{r}) e^{-j(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (5.34)$$

принадлежат пространству \mathcal{L} : $\mathbf{l} = \mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha$, $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$, $k_0 \in \mathcal{K}_0$, каждый элемент которого соответствует разности волновых векторов пространств \mathcal{K} и \mathcal{K}_0 . Тогда для схемы с фиксированной приемной апертурой

$$\bar{\epsilon}(-\beta - k_0 \cos \alpha, \sqrt{k_0^2 - \beta^2} - k_0 \sin \alpha) = T^{(B)}(-\beta, \sqrt{k_0^2 - \beta^2}). \quad (5.35)$$

Набор полуокружностей данных в импульсном пространстве, соответствующий (5.35), представлен на рис. 5.7.

Для схемы с согласованной приемно-излучательной системой (рис. 5.8) из (5.22) и (5.33) получим

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}((\gamma - k_0) \cos \alpha - \beta \sin \alpha, (\gamma - k_0) \sin \alpha + \beta \cos \alpha) = \\ = T^{(B)}(\gamma \cos \alpha, \gamma \sin \alpha + \beta \cos \alpha). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Выделенные участки окружностей Эвальда на рис. 5.7 и 5.8 соответствуют экспериментальной регистрации проекционных данных.

Из (5.35) и (5.36) следует, что при помощи проекционных соотношений (5.20) и (5.22) пространственный спектр искомого рассеивателя может быть восстановлен в «информационном» круге радиуса

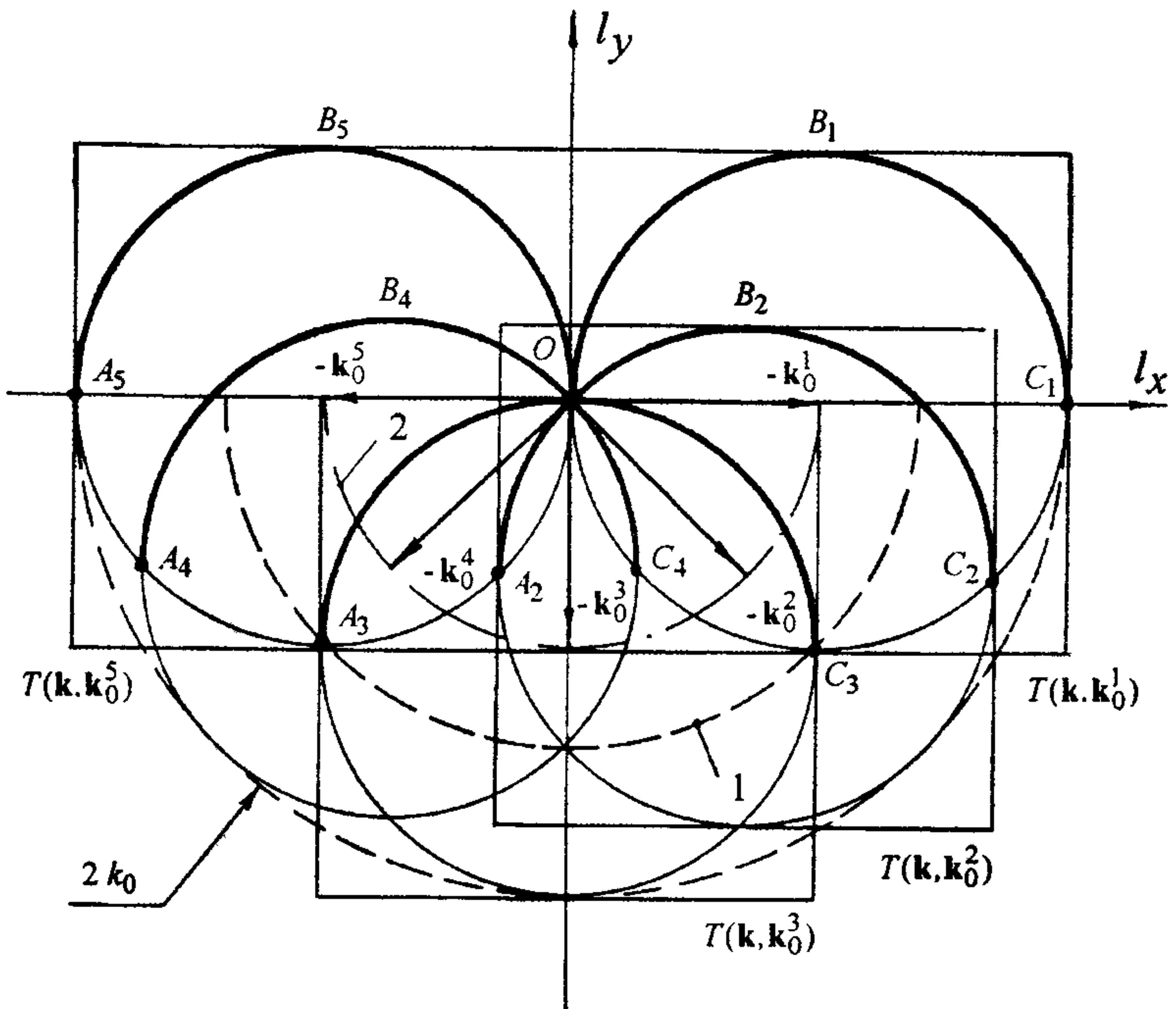


Рис. 5.7. Соответствие элементов T -матриц компонентам пространственного спектра неоднородности для схемы с фиксированной приемной апертурой 1 - окружность радиуса $\sqrt{2}k_0$, 2 - линия волновых векторов $k_0 s_0^\alpha$, выделенные участки окружностей Эвальда - данные, полученные с помощью проекционных соотношений

$l_{max} = \sqrt{2}k_0$. Причиной этого является то, что в проекционных схемах данные регистрируются на некоторой линии L_r , отстоящей на расстоянии l_0 от объекта (просветные данные). Поэтому в уравнении (5.16) была выполнена замена $|l_0 - x \cos(-\alpha - \vartheta) + y \sin(-\alpha - \vartheta)|$ на $l_0 - x \cos(-\alpha - \vartheta) + y \sin(-\alpha - \vartheta)$, что и определило итоговый вид соотношений (5.20) и (5.22). При выводе же (5.33) не использовались какие-либо ограничения, касающиеся схемы съема данных. Поэтому в рамках данного метода решения ОЗР можно реализовать

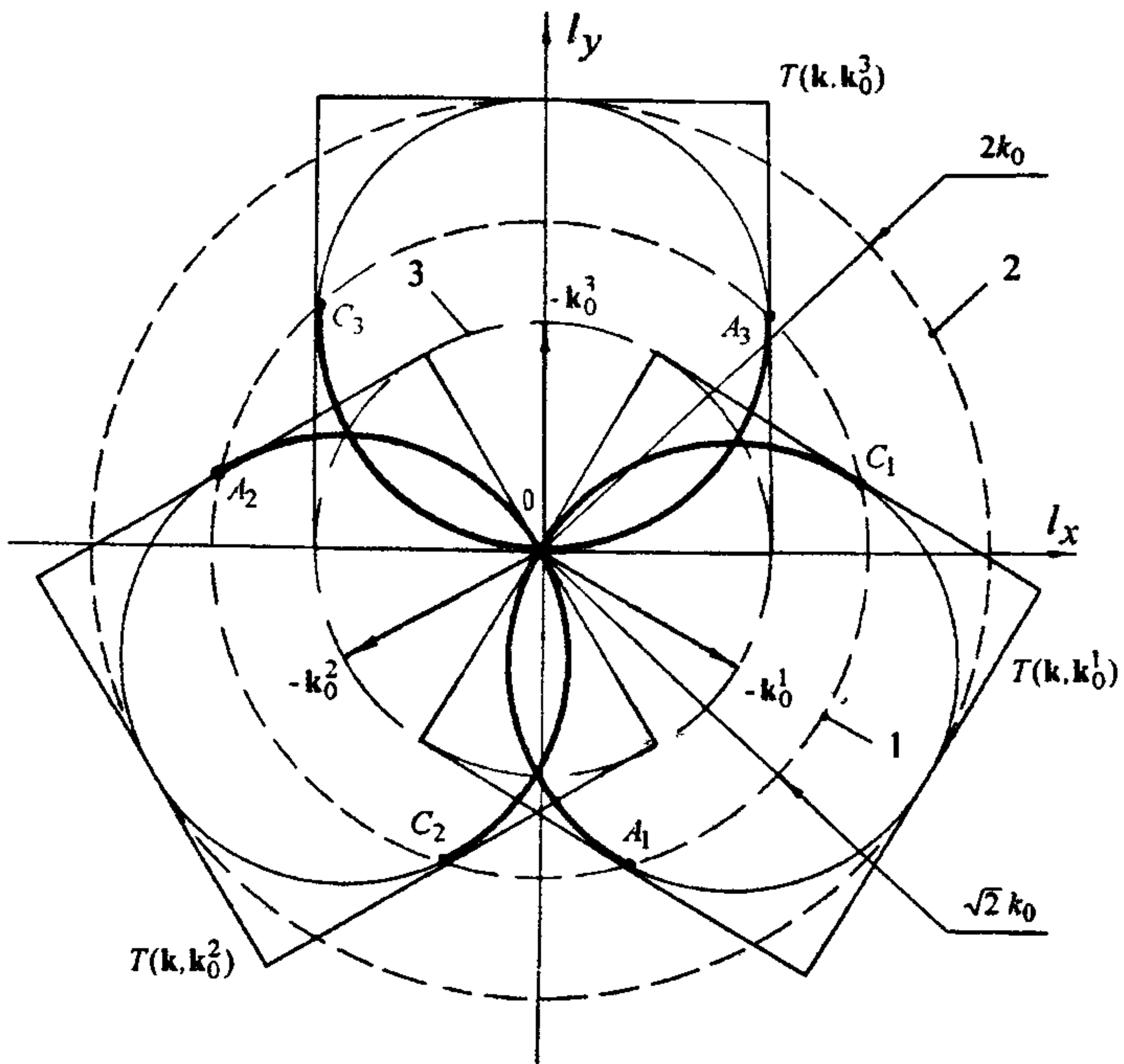


Рис. 5 8. Соответствие элементов T -матриц компонентам пространственного спектра неоднородности для схемы с согласованной приемно-передающей системой 1 - проекционный подход, 2 - T -матричный подход; 3 - линия волновых векторов $k_0 s_0^\alpha$ выделенные участки окружностей Эвальда - данные, полученные с помощью проекционных соотношений

способ томографического эксперимента, отличающийся от описанных выше и обладающий более высокими метрологическими возможностями.

Основная идея такого томографического эксперимента заключается в том, чтобы регистрировать амплитуды и фазы плоских волн, рассеянных объектом во всех направлениях s^β при облучении его с набора направлений s_0^α (рис. 5.9, а). При этом измерение амплитуды давления звукового поля должно производиться

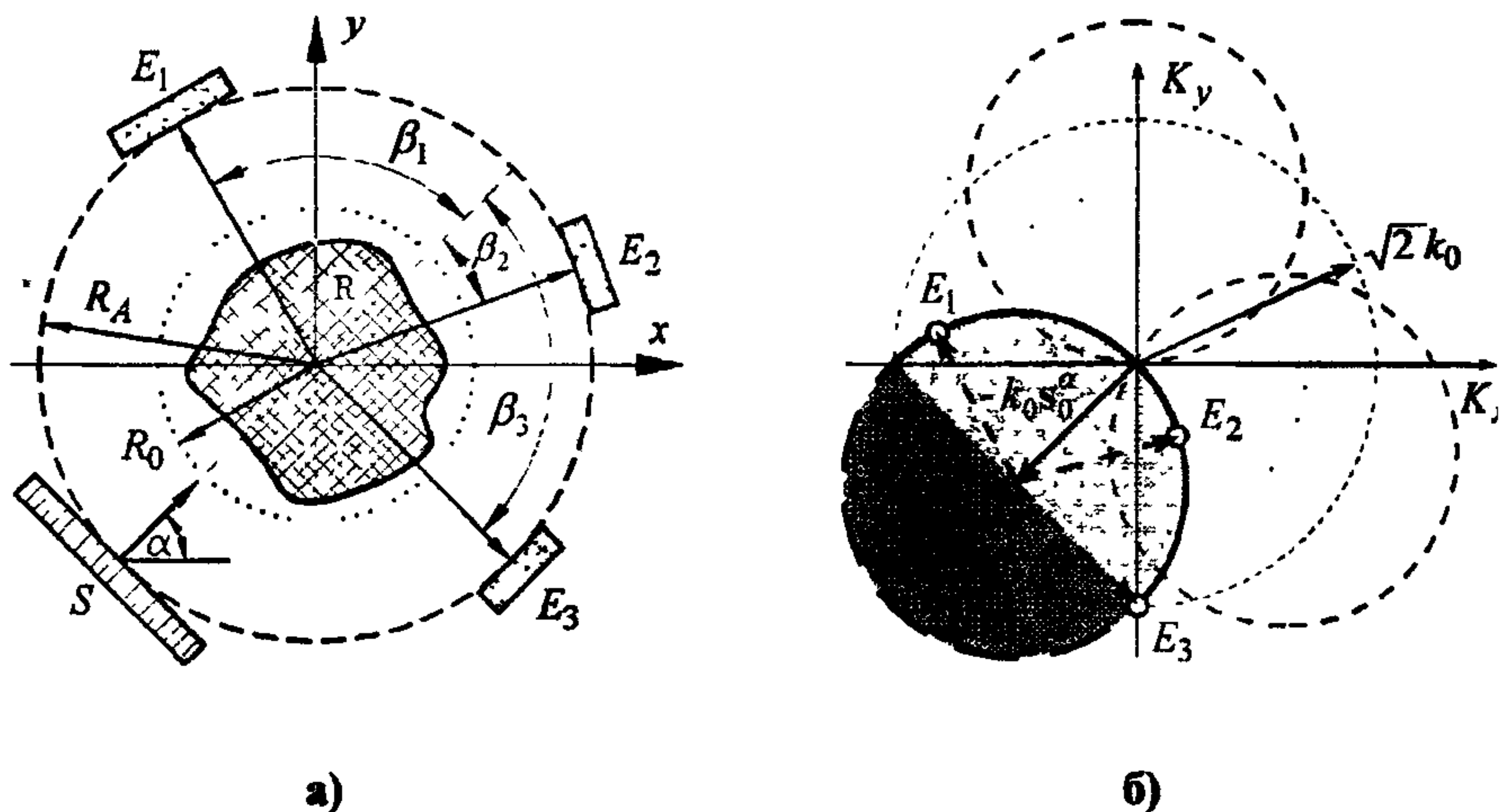


Рис. 5.9. Схема съема томографических данных, заключающаяся в регистрации амплитуд и фаз плоских волн, рассеянных реконструируемой неоднородностью (а), и компоненты пространственного спектра неоднородности, поддающиеся определению при трех положениях приемного преобразователя (б): S - излучатель; E_1, E_2, E_3 - три положения приемного преобразователя

протяженным преобразователем, длина которого значительно превышает длину волны λ зондирующего излучения. Такой преобразователь в силу усреднения значений акустического поля по всей своей поверхности выделяет из него плоскую волну, распространяющуюся в направлении нормали к поверхности преобразователя, и формирует электрический сигнал, связанный с амплитудой и фазой этой плоской волны. Таким образом достигается физическое разложение рассеянного поля на области приема по плоским волнам. Если для каждого фиксированного положения объекта и фиксированного направления \mathbf{s}_0^α съём данных производится в интервале $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$, то повторение измерений для всего многообразия $\{\mathbf{s}_0^\alpha\}$ фактически воспроизводит условия эксперимента с согласованной приемно-излучательной системой (см. рис. 5.8). Если же

интервал фиксируемых направлений рассеяния определяется как $\beta \in [0, 2\pi[$, то экспериментально регистрируемыми данными оказываются и те компоненты $\tilde{\epsilon}(l_x, l_y)$, которые находятся в кольце $\sqrt{2}k_0 \leq l \leq 2k_0$ (рис. 5.9, б). Из (5.33) следует, что количество подпадающих определению фурье-компонент увеличивается по сравнению с проекционным подходом приблизительно в 2 раза за счет увеличения примерно в $\sqrt{2}$ раз радиуса информационного круга. Приблизительность данной оценки объясняется тем, что определение компонент спектра на окружности радиуса $2k_0$ соответствует регистрации данных обратного рассеяния, что достаточно сложно осуществить, имея два протяженных преобразователя.

Описанный способ томографического эксперимента имеет еще одно достоинство: его применение позволяет получить в пространстве волновых векторов выборку данных о пространственном спектре объекта на концентрических окружностях различных радиусов с общим центром в начале координат (рис. 5.10). Если величина угла

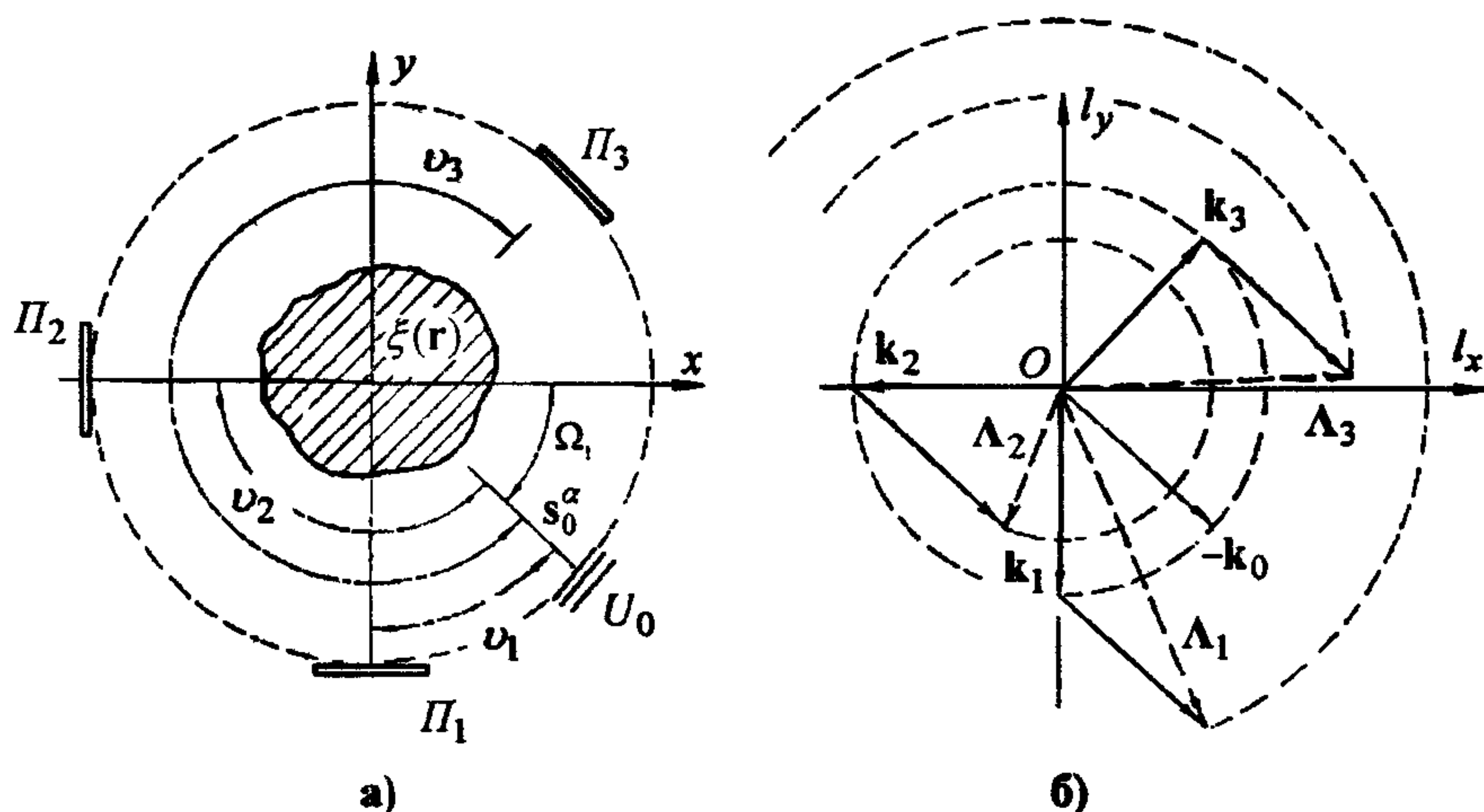


Рис. 5.10. Модифицированная схема волнового томографического эксперимента

ϑ_j , образованного волновыми векторами \mathbf{s}^β и \mathbf{s}_0^α на j -м измерении, удовлетворяет условию $\vartheta_j = \frac{2\pi}{J}$ (где J - общее число дискретных положений приемника на окружности) и для каждого фиксированного угла ϑ_j выполняется полный поворот объекта или, что то же самое, совместное дискретное перемещение приемника и передатчика вокруг центра поворота системы, то получаемая таким образом структура данных в точности совпадает с типичной структурой данных в лучевой вычислительной томографии. При этом если величина угла Ω_i удовлетворяет соотношению $\Omega_i = \frac{2\pi}{I_\Omega}$ (где I_Ω - общее количество дискретных позиций объекта при его полном повороте), то нетрудно показать, что такой методике регистрации томографических данных соответствует равномерное заполнение информационного круга $|l| \leq 2k_0$. Причем дискретизация ϑ_j определяет дискретизацию по радиусу, в то время как дискретизация Ω_i задает дискретизацию по углу.

5.4. Согласование сеток дискретизации исходных данных и пространственного спектра неоднородности

Из теории дискретного преобразования Фурье известно, что если пространственный спектр исходной функции $\epsilon(x, y)$ можно представить дискретными отсчетами в узлах эквидистантной прямоугольной сетки

$$\Lambda_{m', n'} = \left(\frac{m' \pi}{R_0} \right) \mathbf{s}_x + \left(\frac{n' \pi}{R_0} \right) \mathbf{s}_y \quad (5.37)$$

(где $\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y$ - единичные векторы, направления которых совпадают с положительными направлениями осей Ox и Oy ; m', n' - целые), то значение $\tilde{\epsilon}(\Lambda)$ в произвольной точке импульсного пространства (l_x, l_y) можно вычислить по формуле

$$\tilde{\epsilon}(l_x, l_y) = \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \tilde{\epsilon}(\Lambda_{m', n'}) \varphi_{m', n'}(l_x, l_y), \quad (5.38)$$

где

$$\varphi_{m',n'}(l_x, l_y) = \frac{\sin \left[R_0 \left(l_x - \frac{m'\pi}{R_0} \right) \right]}{R_0 \left(l_x - \frac{m'\pi}{R_0} \right)} \frac{\sin \left[R_0 \left(l_y - \frac{n'\pi}{R_0} \right) \right]}{R_0 \left(l_y - \frac{n'\pi}{R_0} \right)}. \quad (5.39)$$

Бесконечные пределы суммирования по m' и n' в (5.38) могут быть заменены конечным множеством декартовых отсчетов, если количество N отличных от нуля отсчетов функции $\epsilon(\mathbf{r})$ конечно:

$$\tilde{\epsilon}(l_x, l_y) = \sum_{m'=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}-1} \sum_{n'=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}-1} \tilde{\epsilon}(\Lambda_{m' n'}), \varphi_{m',n'}(l_x, l_y). \quad (5.40)$$

Рассмотрим квадратную сетку точек в плоскости изображения, заданную множеством $\{(m\Delta x, n\Delta y) : -\frac{N}{2} \leq m \leq \frac{N}{2} - 1, -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1; |\Delta x| = |\Delta y| = \delta\}$, где число дискретных отсчетов N вдоль каждой из осей координат определяется соотношением $N = 2R_0/\delta$, интервал дискретизации $\delta = \lambda/p$; $p \geq 2$ - целое. Координаты узлов эквидистантной сетки в пространстве Фурье можно представить в виде $\{(m'\Delta l, n'\Delta l) : -\frac{N}{2} \leq m' \leq \frac{N}{2} - 1, -\frac{N}{2} \leq n' \leq \frac{N}{2} - 1; -\frac{pk_0}{2} \leq l_x \leq \frac{pk_0}{2}, -\frac{pk_0}{2} \leq l_y \leq \frac{pk_0}{2}\}$, причем интервал дискретизации Δl определяется соотношением $\Delta l = pk_0/N$. Если $p = 2$, то функция $\epsilon(x, y)$ дискретизована с шагом $\delta = \lambda/2$, а значит, $\{(l_x, l_y) : -k_0 \leq l_x, l_y \leq k_0\}$.

Забегая вперед, заметим, что при восстановлении $\epsilon(m\delta, n\delta)$ по совокупности выборочных значений пространственного спектра с учетом многократных рассеяний возможен эффект наложения спектральных составляющих, который служит источником потенциальных ошибок. Это приводит к необходимости увеличения радиуса R_0 , что эквивалентно дополнению эквидистантной сетки в пространстве изображений N нулевыми отсчетами $\{(m\Delta x, n\Delta y) : -N \leq m \leq N - 1, -N \leq n \leq N - 1\}$ вдоль каждой из осей Ox, Oy , и если $\{(m, n) : -N \leq m, n \leq -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} \leq m, n \leq N - 1\}$, то $\epsilon(m\delta, n\delta) \equiv 0$.

Если функция неоднородности $\epsilon(x, y)$ дискретизована с шагом $\delta = \lambda/2$, то дискретизации на квадратной сетке ($l_x = m' \Delta l, l_y = n' \Delta l$) в фурье-пространстве соответствует максимальная пространственная частота $l_{max} = \sqrt{2}(N/2)\Delta l$ или $\sqrt{2}k_0$. В этом случае для получения борновского решения ОЗР (5.33) в томографической постановке необходимо определить компоненты пространственного спектра $\tilde{\epsilon}(l_x, l_y)$ в узлах сетки размерности $N \times N$ с шагом дискретизации $\Delta l = \pi/R_0$. Однако в подавляющем большинстве случаев структура первичных данных такова, что условия, обеспечивающие совпадение координат дискретных отсчетов данных $T(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ для произвольной пары α и β с координатами узлов квадратной сетки $(m' \Delta l, n' \Delta l)$, не выполняются. Из (5.33) следует, что такими условиями для проекционного томографического эксперимента являются соотношения

$$\begin{aligned} (\gamma - k_0 \cos \vartheta) \cos(\alpha + \vartheta) - (\beta + k_0 \sin \vartheta) \sin(\alpha + \vartheta) &= m' \Delta l, \\ (\gamma - k_0 \cos \vartheta) \sin(\alpha + \vartheta) + (\beta + k_0 \sin \vartheta) \cos(\alpha + \vartheta) &= n' \Delta l. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Для томографического эксперимента, в котором первичные данные регистрируются в виде амплитуд и фаз плоских волн, рассеянных по всем направлениям β (см. рис. 5.9), соответствующие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} k_0 \cos(\alpha + \beta) + k_0 \cos \alpha &= m' \Delta l, \\ k_0 \sin(\alpha + \beta) + k_0 \cos \alpha &= n' \Delta l. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Устранение данного несоответствия возможно тремя способами: 1) интерполяцией значений $T(\mathbf{k}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$, заданных в дискретном виде на энергетических поверхностях; 2) непосредственным применением формул преобразований соответствующих координатных систем; 3) регистрацией именно тех компонент $T(\mathbf{k}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$, которым соответствуют значения $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$, совпадающие с отсчетами $(m' \Delta l, n' \Delta l)$.

С этой точки зрения алгоритмы дифракционной фурье-томографии подразделяют на две группы.

Первая группа включает алгоритмы, в которых получение оценок $\tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ связано с процедурами интерполяции. Практическая реализация таких алгоритмов вносит упрощения в экспериментальном плане, но сопряжена со значительными вычислительными сложностями.

Вторая группа объединяет безынтерполяционные алгоритмы, в которых наиболее трудоемким является этап сбора данных, а обработка сводится к выполнению преобразования Фурье массива $\tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l)$. Экспериментальная реализация указанных алгоритмов предполагает многопозиционное, а иногда и многочастотное облучение и сопровождается значительными метрологическими сложностями. Кроме того, при попытке обобщения безынтерполяционных алгоритмов для решения ОЗР с учетом многократных рассеяний возникают дальнейшие серьезные затруднения, так как резко возрастает набор волновых векторов $\{\mathbf{k}_0^\alpha\}$, для которых необходимо решать большое количество вспомогательных прямых задач.

Можно выделить два класса интерполяционных процедур, возникающих при решении акустических ОЗР томографического типа в пространстве Фурье. К первому классу относятся процедуры оценивания значений $\tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ по известному набору $\tilde{\epsilon}(\xi_1(\alpha, \beta), \xi_2(\alpha, \beta))$ на доступных окружностях $(\xi_1(\alpha, \beta), \xi_2(\alpha, \beta))$ - известные функции, зависящие от параметров α и β). Соответствующее данному классу интерполяционное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l) &= \sum_{i,j=1}^{I_\alpha, J_\beta} \tilde{\epsilon}(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) \times \\ &\times \tilde{\varphi}_{ISP}(m' \Delta l - l_x(\alpha_i, \beta_j), n' \Delta l - l_y(\alpha_i, \beta_j)), \end{aligned} \quad (5.43)$$

где

$$\begin{aligned} l_x(\alpha_i, \beta_j) &= (\gamma_j - k_0 \cos \vartheta_i) \cos \varphi_i - (\beta_j + k_0 \sin \vartheta) \sin \varphi_i, \\ l_y(\alpha_i, \beta_j) &= (\gamma_j - k_0 \cos \vartheta) \sin \varphi_i + (\beta_j + k_0 \sin \vartheta) \cos \varphi_i \end{aligned} \quad (5.44)$$

для томографических проекционных схем (см. рис. 5.2 и 5.3) и

$$\begin{aligned} l_x(\alpha_i, \beta_j) &= k_0 \cos(\alpha_i + \beta_j) + k_0 \cos \alpha_i, \\ l_y(\alpha_i, \beta_j) &= k_0 \sin(\alpha_i + \beta_j) + k_0 \cos \alpha_i, \end{aligned} \quad (5.45)$$

для томографических схем диагностики, ориентированных на регистрацию амплитуд рассеяния (см. рис. 5.9 и 5.10); $\varphi_i = \alpha_i + \vartheta$; $\tilde{\varphi}_{ISP}$ - интерполяционная функция обратной задачи; знак $[\tilde{\cdot}]$ над функцией φ_{ISP} означает, что интерполяция производится в пространстве Фурье. С учетом (5.33) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l) &= \sum_{i,j=1}^{I_\alpha, J_\beta} T^B(\gamma_j \mathbf{s}_0(\alpha_i + \vartheta) + \beta_j \mathbf{s}_0^\perp(\alpha_i + \vartheta)) \times \\ &\times \tilde{\varphi}_{ISP}(m' \Delta l - l_x(\alpha_i, \beta_j), n' \Delta l - l_y(\alpha_i, \beta_j)). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Второй класс включает процедуры, в которых неизвестными величинами являются компоненты $\tilde{\epsilon}(\chi_1(\alpha, \beta), \chi_2(\alpha, \beta))$ или $T(\mathbf{k}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$ на излучающих поверхностях, а интерполируемыми - отсчеты $\tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ и $T(\mathbf{k}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$ в узлах квадратной сетки. По аналогии с (5.43) интерполяционное уравнение второго класса можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) &= \sum_{m', n'}^{M, N} \tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l) \times \\ &\times \tilde{\varphi}_{DSP}(l_x(\alpha_i, \beta_j) - m' \Delta l, l_y(\alpha_i, \beta_j) - n' \Delta l), \end{aligned} \quad (5.47)$$

в котором $l_x(\alpha_i, \beta_j)$ и $l_y(\alpha_i, \beta_j)$ также определяются выражениями (5.44) либо (5.45); $\tilde{\varphi}_{DSP}$ - интерполяционная функция прямой задачи.

В линеаризованных алгоритмах, использующих борновское или рытовское приближения, имеют место только процедуры первого класса. Задача интерполяции в таких алгоритмах является центральной проблемой, и от ее решения зависит и трудоемкость вычислительного процесса, и качество реконструируемой томограммы.

Алгоритмы точного решения ОЗР вида (5.9) в томографической постановке включают процедуры как первого, так и второго

классов. В частности, задача интерполяции значений $\tilde{\epsilon}(\chi_1(\alpha, \beta), \chi_2(\alpha, \beta))$ в отсчеты $\tilde{\epsilon}(m'\Delta l, n'\Delta l)$ относится собственно к обратной задаче, а задача аппроксимации $\tilde{\epsilon}(\chi_1(\alpha, \beta), \chi_2(\alpha, \beta))$ по известным оценкам $\tilde{\epsilon}^*(m'\Delta l, n'\Delta l)$ или $T^*(\mathbf{k}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$ возникает на каждом шаге решения прямой задачи рассеяния (ПЗР) в (5.9).

Конкретный вид функций $\tilde{\varphi}_{ISP}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ в (5.43) или в (5.46) и $\tilde{\varphi}_{DSP}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ в (5.47) определяется исходя из соображений трудоемкости вычислительного процесса и качества итоговой реконструкции.

Наиболее распространенными методами интерполяции в томографических задачах являются интерполяция нулевого порядка («по ближайшему соседу») и k -точечная интерполяция.

Для любой точки $(m'\Delta, n'\Delta)$ оценкой функции $\tilde{\epsilon}(m'\Delta l, n'\Delta l)$ «по ближайшему соседу» служит величина $\tilde{\epsilon}(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j))$ при таких значениях i и j , которые минимизируют функцию

$$\left\{ (m'\Delta l - l_x(\alpha_i, \beta_j))^2 + (n'\Delta l - l_y(\alpha_i, \beta_j))^2 \right\}^{1/2},$$

являющуюся расстоянием до заданной точки $(m'\Delta, n'\Delta)$.

Для любой точки $(m'\Delta, n'\Delta)$ k -точечной оценкой интерполируемой функции $\tilde{\epsilon}(m'\Delta l, n'\Delta l)$ служит взвешенная сумма значений функции $\tilde{\epsilon}(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j))$ в k ближайших узлах криволинейной сетки, поддающихся определению в томографическом эксперименте. Реализация четырехточечной, так называемой «билинейной» интерполяции показана на рис. 5.11. Для случая прямой билинейной интерполяции выражение (5.47) принимает вид

$$\tilde{\epsilon}(P) = \frac{\sum_{q=1}^4 \frac{1}{d_q} \tilde{\epsilon}(P_q)}{\sum_{q=1}^4 \frac{1}{d_q}}. \quad (5.48)$$

Для случая обратной билинейной интерполяции, характеризуемой уравнением (5.43), имеем

$$\tilde{\epsilon}(P) = \frac{\tilde{\epsilon}(P_5) d + \tilde{\epsilon}(P_6) c}{c + d}, \quad (5.49)$$

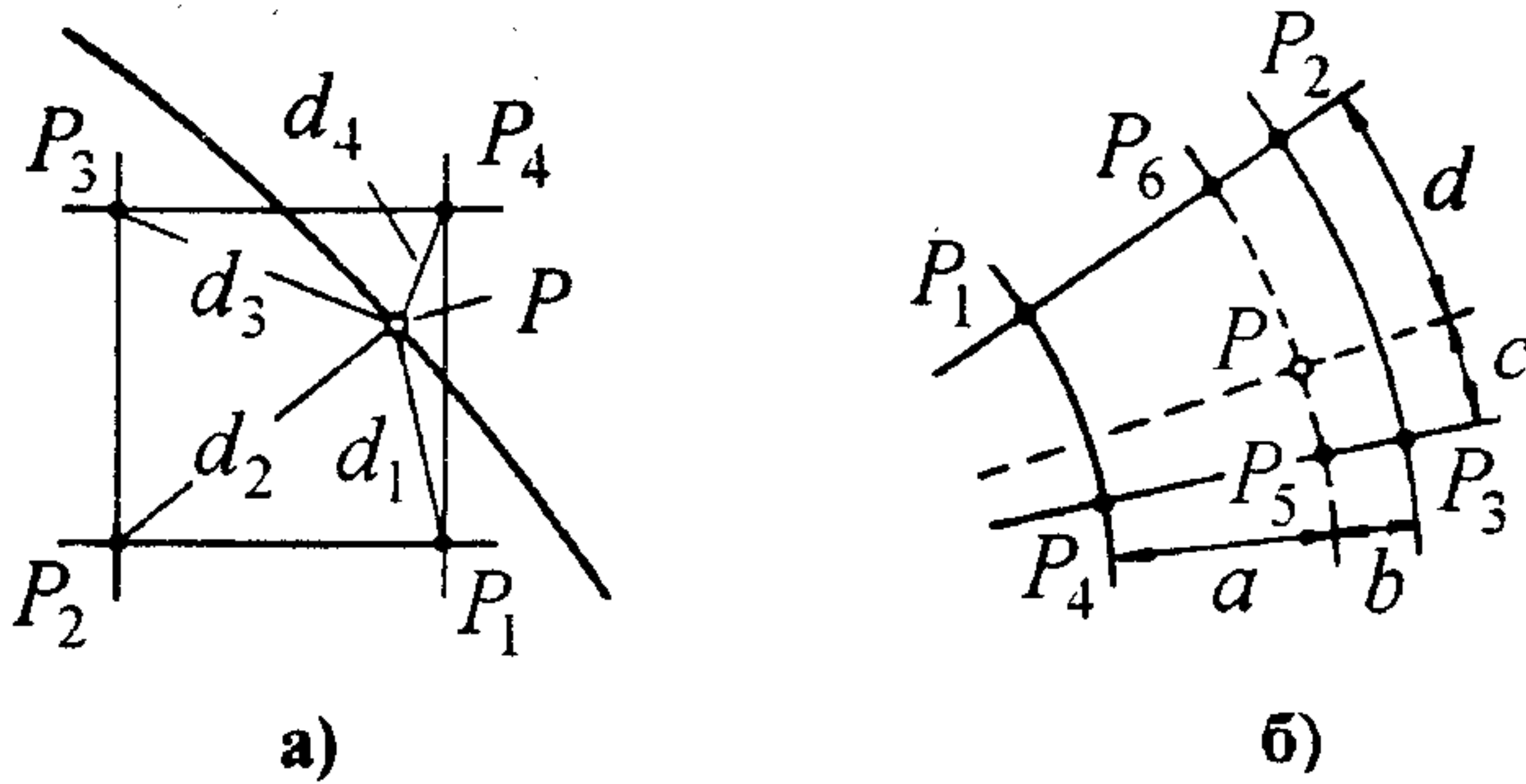


Рис. 5.11. Прямая (а) и обратная (б) билинейные интерполяции

где

$$\bar{\epsilon}(P_5) = \frac{\bar{\epsilon}(P_1) b + \bar{\epsilon}(P_2) a}{a + b}, \quad \bar{\epsilon}(P_6) = \frac{\bar{\epsilon}(P_3) b + \bar{\epsilon}(P_4) a}{a + b}.$$

Проведем сравнительный анализ интерполяционных процедур дифракционной томографии, взяв за основу интерполяционное уравнение прямой задачи (5.47) и применив подход, разработанный первоначально для сравнения фурье-алгоритмов рентгеновской томографии.

Функция $\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ должна удовлетворять следующим требованиям:

1) если $\tilde{\varphi}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ действительна для всех m', n' , то $\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ должна быть действительной функцией аргументов;

2) функция должна быть ограниченной, т.е. $\|\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)\| \leq C$, для любой пары $(\Delta l_x, \Delta l_y)$, C - константа;

3) если функция $\tilde{\varphi}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ гладкая, то $\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ должна быть также гладкой.

Соблюдение этих требований позволяет, в частности, аппроксимировать интегралы

$$\int \int \bar{\epsilon}(l_x, l_y) \tilde{\varphi}(l_x(\alpha, \beta) - l_x, l_y(\alpha, \beta) - l_y) dl_x dl_y$$

суммами вида (5.47).

Потребуем также, чтобы интерполяционный алгоритм с функцией $\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$, удовлетворяющей условиям 1 - 3, являлся точным, т.е.

$$\tilde{e}(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) = \tilde{e}(m' \Delta l, n' \Delta l), \quad (5.50)$$

в котором выполняются условия (5.44) либо (5.45) для каждого значения $-\frac{N}{2} \leq m', n' \leq \frac{N}{2} - 1$.

Нетрудно показать, что условиям 1 - 3, а также (5.50) удовлетворяют функции вида

$$\tilde{\varphi}_e = \prod_{s=1}^2 \text{sinc} \left(\frac{R_0}{\pi} (l_s(\alpha, \beta) - l_s) \right), \quad (5.51)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \prod_{s=1}^2 \text{triang} \left(\frac{R_0}{\pi} (l_s(\alpha, \beta) - l_s) \right), \quad (5.52)$$

$$\tilde{\varphi}_0 = \prod_{s=1}^2 \text{rect} \left(\frac{R_0}{\pi} (l_s(\alpha, \beta) - l_s) \right), \quad (5.53)$$

где $\prod_{s=1}^2$ означает произведение, а компоненты вектора Λ пронумерованы: $\Lambda = (l_x, l_y) \equiv (l_1, l_2)$.

В (5.51) - (5.53) введены также обозначения:

$$\text{triang}(\Delta l) = \begin{cases} 1 - |\Delta l|, & |\Delta l| \leq 1, \\ 0, & |\Delta l| > 1, \end{cases} \quad (5.54)$$

$$\text{rect}(\Delta l) = \begin{cases} 1, & |\Delta l| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |\Delta l| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.55)$$

Функция $\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ вида (5.51) соответствует случаю точной sinc-интерполяции (5.38) и (5.39); вида (5.52) - случаю интерполяции «по ближайшему соседу» и вида (5.53) - случаю билинейной интерполяции.

Оценим погрешности интерполяции сеточной функции $\tilde{e}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ в некоторую точку $(l_x(\alpha, \beta), l_y(\alpha, \beta))$, когда значение

интерполируемой функции $\tilde{e}(l_x(\alpha, \beta), l_y(\alpha, \beta))$ рассчитывается по формуле (5.47), а зависимости $\tilde{\varphi}_e(\Delta l_x, \Delta l_y)$ имеют вид (5.51) - (5.53).

Погрешности реконструкции, связанные с процедурой интерполяции, могут быть разделены на два вида.

Погрешности первого вида - это искажения структуры реконструируемого двумерного распределения, обусловленные отличием спектра интерполяционной функции от единицы в пределах основной области пространственных частот $|\Lambda| \leq \Lambda_{max}$. Поскольку интерполяция носит характер свертки (5.42), эти погрешности относятся к линейным и в принципе исправимы. В рассматриваемом случае, когда интерполяция осуществляется в импульсном пространстве, погрешности первого вида есть следствие неравномерности функции $\varphi(x, y)$, получающейся в результате применения обратного преобразования Фурье к интерполяционной функции $\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$, на квадратной области $x \in [R_0, R_0]$; $y \in [R_0, R_0]$, полностью содержащей неоднородность.

Погрешности второго вида - это искажения структуры истинного изображения, обусловленные наложением побочных спектров в пределах области частот $|\Lambda| \leq \Lambda_{max}$. Погрешности второго вида нельзя устранить последующей линейной обработкой без потери точности в воспроизведении исходной структуры.

Количественные оценки среднеквадратических ошибок погрешностей интерполяции первого и второго видов могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{(2R_0)^2} \int_{-R_0}^{R_0} \int_{-R_0}^{R_0} \left| 1 - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} \right|^2 dx dy = \\ &= 1 - \frac{1}{(2R_0)^2} \left[2\operatorname{Re} \int_{-R_0}^{R_0} \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} dx dy - \int_{-R_0}^{R_0} \int_{-R_0}^{R_0} \left| \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} \right|^2 dx dy \right], \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\int_{-\infty}^{-R_0} \int_{-\infty}^{-R_0} |\varphi(x, y)|^2 dx dy + \int_{-\infty}^{-R_0} \int_{-R_0}^{R_0} |\varphi(x, y)|^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x, y)|^2 dx dy} =$$

$$= 1 - \int_{-R_0}^{R_0} \int_{-R_0}^{R_0} |\varphi(x, y)|^2 dx dy / \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x, y)|^2 dx dy. \quad (5.57)$$

Для того, чтобы оценить среднеквадратическую ошибку интерполяции первого σ_1^2 и второго σ_2^2 видов, необходимо выполнить обратное преобразование Фурье в (5.51) - (5.53) и подставить полученные результаты соответственно в (5.56) и (5.57).

Выражения для $\varphi_e(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ имеют вид:

$$\varphi_e(x, y) = \text{rect} \left(\frac{x}{2R_0} \right) \cdot \text{rect} \left(\frac{y}{2R_0} \right); \quad (5.58)$$

$$\varphi_2(x, y) = \text{sinc}^2 \left(\frac{x}{2R_0} \right) \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{y}{2R_0} \right); \quad (5.59)$$

$$\varphi_0(x, y) = \text{sinc} \left(\frac{x}{2R_0} \right) \cdot \text{sinc} \left(\frac{y}{2R_0} \right). \quad (5.60)$$

Для точной интерполяции подстановкой (5.58) в (5.56) и (5.57) получим соответственно $\sigma_1^2 = 0, 0$ и $\sigma_2^2 = 0, 0$. Выражение для среднеквадратической ошибки σ_1^2 билинейной интерполяции (5.52) имеет вид:

$$\sigma_1^2 = 1 - \frac{1}{(2R_0)^2} \left[2Re \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)^2} dx \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)^2} dy - \right.$$

$$\left. - \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^4 \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)^4} dx \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^4 \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)^4} dy \right]. \quad (5.61)$$

Здесь и далее при интегрировании использованы рекуррентные соотношения

$$\int \frac{\sin^{2m} z}{z^2} dz = - \binom{2m}{m} \frac{1}{2^{2m} z} + \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \times \quad (5.62)$$

$$\times \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{2m}{k} \left\{ \frac{\cos(2m-2k)z}{z} + (2m-2k) Si[(2m-2k)z] \right\};$$

$$\int \frac{\sin^q z}{z^p} dz = - \frac{\sin^{q-1} z [(p-2) \sin z + qz \cos z]}{(p-1)(p-2)z^{p-1}} - \quad (5.63)$$

$$- \frac{q^2}{(p-1)(p-2)} \int \frac{\sin^q z dz}{z^{p-2}} + \frac{q(q-1)}{(p-1)(p-2)} \int \frac{\sin^{q-2} z dz}{z^{p-2}}.$$

Выражение для σ_1^2 в случае билинейной интерполяции имеет вид:

$$\sigma_1^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[-\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})} + Si(\pi) \right]^2 + \frac{4}{\pi^2} \left\{ -\frac{\sin^4(\frac{\pi}{2})}{3(\frac{\pi}{2})^3} - \right.$$

$$- \frac{2}{3} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})^2} + 2 \left[\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})} + Si(\pi) \right] - \quad (5.64)$$

$$\left. - \frac{8}{3} \left[-\frac{\sin^4(\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})} + Si(\pi) - \frac{1}{2} Si(2\pi) \right] \right\}.$$

По аналогии с (5.61) из (5.57) следует, что величина σ_2^2 для данной интерполяционной процедуры оценивается с помощью выражения

$$\sigma_2^2 = 1 - \frac{\int_{-R_0}^{R_0} \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2R_0}\right) / \left(\frac{\pi x}{2R_0}\right) \right|^4 dx \int_{-R_0}^{R_0} \left| \sin\left(\frac{\pi y}{2R_0}\right) / \left(\frac{\pi y}{2R_0}\right) \right|^4 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2R_0}\right) / \left(\frac{\pi x}{2R_0}\right) \right|^4 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{\pi y}{2R_0}\right) / \left(\frac{\pi y}{2R_0}\right) \right|^4 dy}, \quad (5.65)$$

которое после интегрирования примет вид:

$$\sigma_2^2 = 1 - \frac{9}{\pi^2} \left\{ -\frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} - \frac{2}{3} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + \right. \quad (5.66)$$

$$\left. + 2 \left[-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} + Si(\pi) \right] - \frac{8}{3} \left[-\frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} + Si(\pi) - \frac{1}{2} Si(2\pi) \right] \right\}.$$

В (5.66) учтено, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 az}{z^4} dz = \frac{a^3 \pi}{3} \quad [a > 0]. \quad (5.67)$$

Из (5.64) и (5.66) получаются значения среднеквадратических ошибок билинейной интерполяции: $\sigma_1 = 0,46$ и $\sigma_2 = 0,29$.

Заметим, что если интерполируемый отсчет совпадает с линией узлов $m'\Delta l$ или $n'\Delta l$, то билинейная интерполяция заменяется линейной интерполяцией, для которой интерполяционная функция $\tilde{\varphi}(\Delta l_z)$ имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(\Delta l_z) = \text{triang} \left(\frac{R_0}{\pi} \Delta l_z \right), \quad (5.68)$$

в котором обобщенную переменную z следует заменить на x , если $l_y = n'\Delta l = \text{const}$ (т.е. номер n' фиксирован), и наоборот, $z \equiv y$, если $l_x = m'\Delta l = \text{const}$. После подстановки (5.68) в уравнения (5.56) и (5.57) с заменой в последних двукратных интегралов однократными получим выражения, аналогичные (5.64) и (5.66), позволяющие оценить величины σ_1 и σ_2 для линейной интерполяции: $\sigma_1 = 0,3$ и $\sigma_2 = 0,21$.

Оценим величину среднеквадратических ошибок двумерной интерполяции нулевого порядка «по ближайшему соседу». Подставив функцию $\tilde{\varphi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ из (5.53) в (5.56) и (5.57), получим

$$\sigma_1^2 = 1 - \frac{1}{(2R_0)^2} \left[2Re \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)^2} dx \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)^2} dy - \right. \\ \left. - \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^4 \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi x}{2R_0} \right)^4} dx \int_{-R_0}^{R_0} \frac{\sin^4 \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)}{\left(\frac{\pi y}{2R_0} \right)^4} dy \right]; \quad (5.69)$$

$$\sigma_2^2 = 1 - \frac{\int_{-R_0}^{R_0} \left| \sin \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right) / \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right) \right|^4 dx \int_{-R_0}^{R_0} \left| \sin \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right) / \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right) \right|^4 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right) / \left(\frac{\pi x}{2R_0} \right) \right|^4 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right) / \left(\frac{\pi y}{2R_0} \right) \right|^4 dy}. \quad (5.70)$$

Выполнив интегрирование в (5.69) и (5.70), найдем

$$\sigma_1^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} Si \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{4}{\pi^2} \left\{ -\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \right)} + Si(\pi) \right\}^2; \quad (5.71)$$

$$\sigma_2^2 = 1 - \frac{4}{\pi^2} \left\{ -\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \right)} + Si(\pi) \right\}. \quad (5.72)$$

Из (5.71) имеем $\sigma_1 = 0,26$ и из (5.72) - $\sigma_2 = 0,63$.

Зная величины σ_1 и σ_2 , легко оценить суммарную погрешность интерполяционной процедуры по формуле

$$\sigma_\Sigma = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}, \quad (5.73)$$

которая для случая билинейной интерполяции равна 0,54 и для случая интерполяции «по ближайшему соседу» составляет 0,68.

Суммарной среднеквадратической погрешностью интерполяционной процедуры удобно пользоваться при сравнении различных процедур интерполяции. При анализе какой-либо конкретной интерполяционной схемы необходимо оценивать и σ_1 , и σ_2 . Дело в том,

что в силу природы ошибок требования к величине допустимых погрешностей первого и второго вида принципиально различны. Так, ошибки первого вида, характерные для линейных систем, не сопряжены с возникновением ложных структур артефактов и обычно существенны лишь для передачи высокочастотных составляющих томограммы. При воспроизведении низкочастотной части изображения они незначительны. Поэтому для двумерного варианта вполне надежным, с нашей точки зрения, является требование $\sigma_1 \leq 40\%$.

Поле нелокализованных погрешностей второго вида σ_2 , накладываясь на изображение томограммы, может привести к ложным оценкам даже в случае крайне низкого уровня погрешностей первого вида, соизмеримого со случайной составляющей погрешностей томографа. Поэтому требование к снижению уровня этих ошибок должно быть наиболее жестким и определяться необходимой чувствительностью контроля. В типичном случае правомерно требование $\sigma_2 \leq 20\%$ для двумерной интерполяции, а для ряда объектов даже $\sigma_2 \leq 2\%$.

Сравнительные данные различных интерполяционных процедур для двумерного случая приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Сравнительные характеристики интерполяционных процедур
дифракционной томографии

Интерполяция	N	σ_1	σ_2	σ_Σ
Нулевого порядка	N^2	0,26	0,63	0,68
Линейная *)	$2 N^2$	0,29	0,22	0,36
Билинейная	$3 N^2$	0,46	0,29	0,54
Sinc-интерполяция	N^4	0,00	0,00	0,00

*) Предельный одномерный случай

Как следует из предшествующего рассмотрения, билинейная интерполяция практически удовлетворяет и условию для σ_1 , и условию для σ_2 . Интерполяция нулевого порядка («по ближайшему соседу») соответствует сформулированному выше требованию к величине погрешности первого вида, но сопровождается недопустимо высокими для большинства томографических алгоритмов погрешностями второго вида.

Из полученных количественных оценок видно, что существенное метрологическое достоинство билинейной интерполяции по сравнению с интерполяцией «по ближайшему соседу» обусловлено значительным снижением погрешностей второго вида. Однако при этом погрешности первого вида заметно возрастают. Уровень же суммарной погрешности билинейной ПЗР-интерполяции, несмотря на значительные вычислительные затраты, следует считать недостаточным, исходя из сформулированных выше требований.

Важной характеристикой интерполяционной процедуры является объем требующихся для ее осуществления затрат.

Для точной интерполяции с использованием неограниченной по протяженности интерполяционной функции (5.51) потребуется не менее $\left(\frac{2R_0}{\delta}\right)^2 = N^2$ умножений в каждой интерполируемой точке и соответственно не менее $\left(\frac{2R_0}{\delta}\right)^4 = N^4$ умножений на всю реконструкцию одной томограммы. В практически значимых задачах $N = 512$ и более, а следовательно, общее число одних только умножений для точной интерполяции приблизительно равно $6,97 \cdot 10^{10}$, что является трудоемким процессом даже в случае реализации алгоритмов линейной томографии.

Билинейная интерполяция с функцией вида (5.52) требует не менее трех умножений в каждой интерполируемой точке, а значит, не менее $3 \left(\frac{2R_0}{\delta}\right)^2 = 3 N^2$ умножений для выполнения полной процедуры. Другими словами, в этом случае количество необходимых операций умножения в $\frac{N^2}{3}$ раз меньше, чем в случае точной интерполяции.

Интерполяция нулевого порядка (5.53) вообще не требует операций умножения, однако ее применение, как было показано ранее, сопровождается заметными погрешностями.

5.5. Прямая фурье-реконструкция

В § 5.4 представлен интерполяционный подход к решению линеаризованной обратной задачи, которая возникает в волновом томографическом эксперименте. Сформулированные интерполяционные алгоритмы ориентированы на получение оценок пространственного спектра реконструируемой функции в узлах эквидистантной сетки дискретизации, требующейся для выполнения обратного быстрого преобразования Фурье (БПФ) массива $\tilde{\epsilon}(m'\Delta l, n'\Delta l)$.

Здесь мы представим альтернативный подход, основанный на использовании аналитического соответствия между исходными томографическими данными $T(k_0\mathbf{s}^\beta, k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$ и функцией $\epsilon(\mathbf{r})$. Эта процедура является специальным случаем более общего метода решения обратных задач данного типа, разрабатываемого на основе функционального подхода.

Для определенности будем рассматривать томографический эксперимент, представленный на рис. 5.9. Из ранее проведенного анализа следует, что наилучшая оценка $\hat{\epsilon}(\mathbf{r})$, которая может быть получена в данном эксперименте в рамках линеаризованной модели (5.30), определяется соотношением

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, k_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\mathbf{l}| \leq 2k_0} \tilde{\epsilon}(\mathbf{l}) e^{j\mathbf{l}\mathbf{r}} d\mathbf{l}. \quad (5.74)$$

Переходя в (5.74) от переменных $l_x = k_0 \cos(\alpha + \beta) + k_0 \cos(\alpha)$ и $l_y = k_0 \sin(\alpha + \beta) + k_0 \sin(\alpha)$, заданных в (5.45), к новым переменным α и β и имея в виду, что модуль якобиана преобразования принимает значение

$$\Delta = \left| \frac{D(l_x, l_y)}{D(\alpha, \beta)} \right| = k_0^2 |\sin \beta|,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \epsilon(x, y) = & k_0^2 \int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) |\sin \beta| \times \\ & \times \exp\{j2k_0 x \cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\beta}{2})\} \times \\ & \times \exp\{j2k_0 y \sin(\alpha + \frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\beta}{2})\} d\alpha. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Если условия эксперимента обеспечивают избыточность измерительных данных ($\approx N^4$), то интегрирование в (5.75) можно заменить суммированием

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(m\delta, n\delta) = & k_0^2 \Delta\alpha \Delta\beta \sum_{i=1}^{I_\alpha} \sum_{j=1}^{J_\beta} f(k_0 \mathbf{s}_j, k_0 \mathbf{s}_{0_i}) |\sin j\Delta\beta| \times \\ & \times \exp\{j2k_0 m\Delta \cos(i\Delta\alpha + \frac{j\Delta\beta}{2}) \cos(\frac{j\Delta\beta}{2})\} \times \\ & \times \exp\{j2k_0 n\Delta \sin(i\Delta\alpha + \frac{j\Delta\beta}{2}) \cos(\frac{j\Delta\beta}{2})\}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Строго говоря, избыточность имеет место лишь в трехмерных обратных задачах томографического типа. Действительно, фурье-образ $\tilde{\epsilon}(\mathbf{l})$ определен во всем \mathcal{L} пространстве соответствующей размерности q (двух- или трехмерной в зависимости от физического содержания задачи). Аналитичность $\tilde{\epsilon}(\mathbf{l})$, определяемая финитным характером $\epsilon(\mathbf{r})$, позволяет, однако, ограничиться определением пространственного спектра на финитной подобласти \mathcal{L} размерности q . Областью определения $T(k_0 \mathbf{s}_0^\alpha, k_0 \mathbf{s}^\beta)$, доступной в волновом эксперименте, является пространство $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}_0$, т.е. прямое произведение двух подобластей на поверхностях Эвальда размерности $q-1$, таким образом, $\dim \mathcal{K}^* = (q-1)^2$. При $q=3$ размерность области определения неизвестной функции $\tilde{\epsilon}(\mathbf{l})$ меньше размерности \mathcal{K}^* , что и

приводит к избыточности данных: каждой точке $\mathbf{l} = k_0 \mathbf{s}^\beta - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha$ области определения $\tilde{f}(\mathbf{l})$ отвечает континуальное множество возможных данных $T_z(k_0 \mathbf{s}_0^\alpha, k_0 \mathbf{s}^\beta)$. Существование такой избыточности должно учитываться либо на этапе планирования томографического эксперимента, либо в алгоритме их обработки.

Тем не менее, при замене (5.75) его дискретным аналогом (5.76) наличие превосходящего количества исходных данных позволяет за счет усреднения как понизить погрешности вычисления интегральной суммы, так и ослабить измерительные погрешности.

Очевидно, что для полной реконструкции рассеивателя с помощью (5.76) объем вычислительных затрат соизмерим с затратами, требующимися для выполнения точной *sinc*-интерполяции (5.38) и (5.39). Однако, применяя (5.76), можно осуществить реконструкцию рассеивателя в любой точке \mathbf{r} независимо от остальных элементов изображения, что дает, например, возможность воспроизвести изображение грубо, а затем выполнить визуализацию лишь интересующей области. Кроме того, в трехмерном варианте использование (5.76) позволяет реконструировать произвольный двумерный срез исследуемого объекта.

5.6. Численное моделирование в акустической томографии

Продемонстрируем вначале работоспособность алгоритмов дифракционной фурье-томографии первой группы, а именно, интерполяционных алгоритмов, на примере задачи реконструкции простейших модельных неоднородностей: функции гауссовой формы

$$\epsilon(x, y) = \epsilon_0 \left\{ -\pi \frac{x^2 + y^2}{\tau^2} \right\}, \quad (5.77)$$

характеристических функций цилиндра

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} \epsilon_0, & (x^2 + y^2)^{1/2} \leq R_u, \\ 0, & (x^2 + y^2)^{1/2} > R_u \end{cases} \quad (5.78)$$

и эллипса

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} \epsilon_0, & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1, \\ 0, & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 > 1. \end{cases} \quad (5.79)$$

Выбор рассеивателей вида (5.77) - (5.79) является общепринятым на первоначальном этапе тестирования реконструктивных алгоритмов томографического типа и объясняется двумя причинами.

Во-первых, известны аналитические выражения их фурье-образов. Так, пространственный спектр неоднородности гауссовой формы (5.77) имеет вид

$$\tilde{\epsilon}(l_x, l_y) = \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^2} \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{4\pi} (l_x^2 + l_y^2) \right\}, \quad (5.80)$$

неоднородности (5.78) -

$$\tilde{\epsilon}(l_x, l_y) = \epsilon_0 R_{\text{ц}}^2 \frac{J_1 \left(R_{\text{ц}} \sqrt{l_x^2 + l_y^2} \right)}{R_{\text{ц}} \sqrt{l_x^2 + l_y^2}}, \quad (5.81)$$

и, наконец, функции (5.79) -

$$\tilde{\epsilon}(l_x, l_y) = \epsilon_0 \frac{a J_1 \left(b \sqrt{(al_x/b)^2 + l_y^2} \right)}{\sqrt{(al_x/b)^2 + l_y^2}}, \quad (5.82)$$

где J_1 - функция Бесселя первого рода первого порядка.

Во-вторых, пространственные спектры (5.80) - (5.82) имеют характерную низкочастотную структуру, что позволяет говорить об их качественном восстановлении как на основании данных рассеяния, локализованных в круге $2k_0$, так и на основании проекционных данных, локализованных в круге $\sqrt{2}k_0$.

Исходными величинами в интерполяционном алгоритме (5.46) являются элементы $T(k_0 \mathbf{s}_0^\alpha, k_0 \mathbf{s}^\beta)$, соответствующие значениям интерполируемых функций (5.80) - (5.82) в точках, задаваемых выражением (5.44) при $\vartheta = 0$, что отвечает томографической схеме съема

проекционных данных с согласованной приемно-передающей апертурой (см. рис. 5.3, 5.6):

$$\begin{aligned} l_x(\alpha_i, \beta_j) &= \left(\sqrt{k_0^2 - (j\Delta l)^2} - k_0 \right) \cos(\alpha_i) - j\Delta l \sin(\alpha_i); \\ l_x(\alpha_i, \beta_j) &= \left(\sqrt{k_0^2 - (j\Delta l)^2} - k_0 \right) \sin(\alpha_i) + j\Delta l \cos(\alpha_i), \end{aligned} \quad (5.83)$$

где $\alpha_i = 2\pi i/I_\alpha$. Структура данных идентична той, которая была показана на рис. 5.6. Выходной массив $\tilde{\epsilon}(m'\Delta, n'\Delta)$ и соответствующее ему изображение $\epsilon(m\delta, n\delta)$ имеют размерность $N \times N$, причем N удовлетворяет соотношению $N = 2^p$, где p - целое, что позволяет эффективно использовать БПФ. В процессе моделирования величина N изменялась от 16 до 512. На рис. 5.12 - 5.15 приведены графики центральных сечений и центральные проекции реконструируемых рассеивателей вида (5.77) - (5.79) для случая, когда $N = 32$, что объясняется удобствами графического оформления. Восстановление производилось по 32 ракурсам ($I_\alpha = 32$) и 32 направлениям приема (отсчетам в спектре проекции). Максимальное изменение скорости звука на области рассеяния $\Delta c_{max} = 0,02c_0$. Реконструированные изображения имеют размеры $16\lambda \times 16\lambda$, где λ - длина волны падающего поля. На рис. 5.13 отметим характерную структуру результирующего изображения, связанную с различной протяженностью исходного объекта вдоль осей Ox, Oy . Учитывая линейный характер интерполяционного соотношения (5.43), можно сделать вывод о том, что указанные искажения реконструируемой функции могут быть частично скомпенсированы. Коррекция ошибок интерполяции такого вида достигается следующим образом:

$$\tilde{\epsilon}_\phi(m'\Delta l, n'\Delta l) = \frac{\tilde{\epsilon}(m'\Delta l, n'\Delta l)}{\tilde{P}(m'\Delta l, n'\Delta l)}, \quad (5.84)$$

где $\tilde{P}(m'\Delta l, n'\Delta l)$ - образ Фурье функции единичного отклика $P(m\delta, n\delta)$ интерполяционной процедуры (5.43). Эта функция образуется в результате восстановления с помощью (5.43) точечного объекта, помещенного в начало координат. На рис. 5.15 представлены

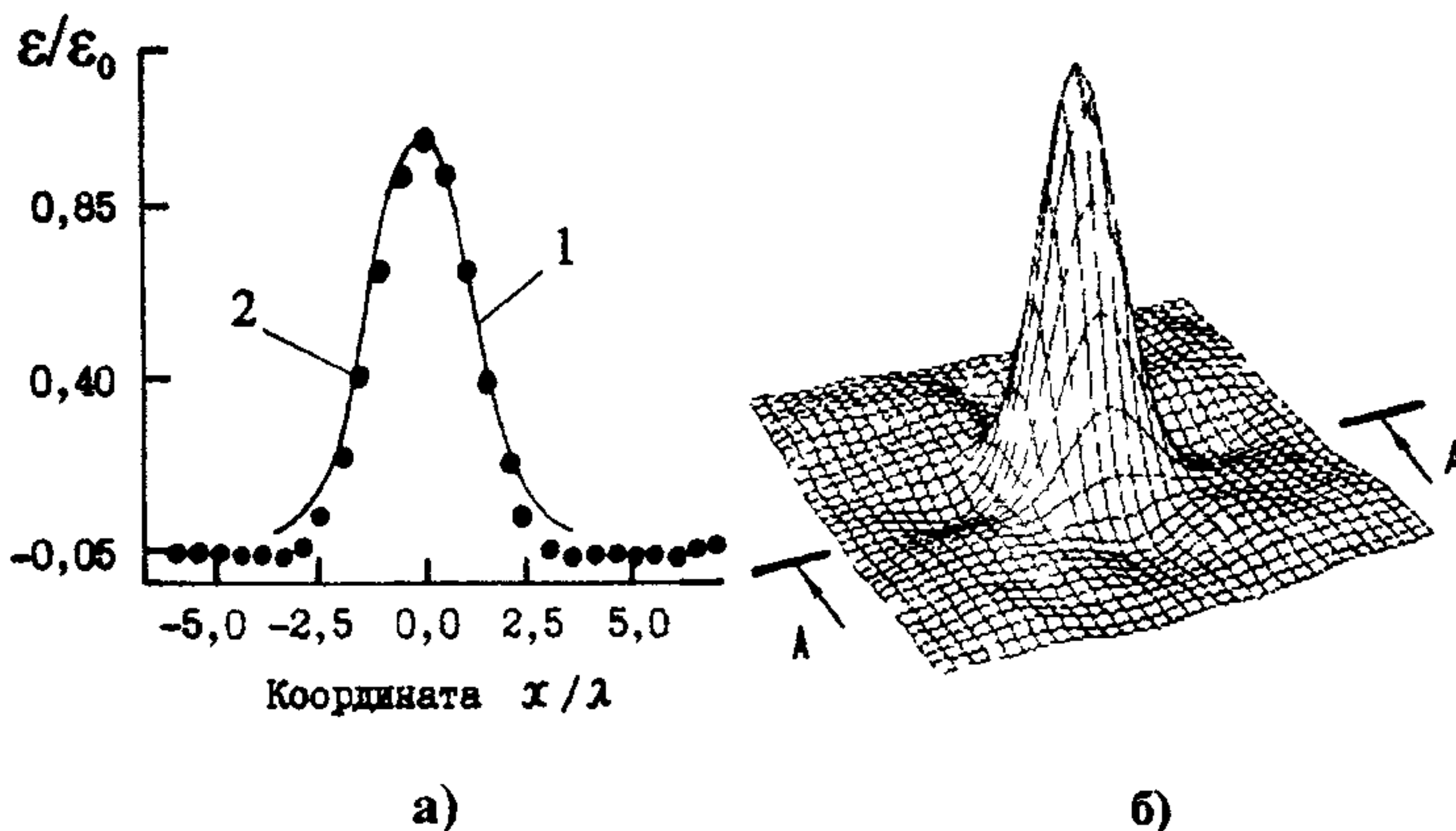


Рис. 5.12 Интерполяционная реконструкция неоднородности вида (5.77) без вторичной фильтрации сечение в плоскости А-А (а) и центральная проекция (б) 1 - истинные значения; 2 - восстановленные значения, $\Delta c_{max} = 0,02c_0$, $R_0 = 4,25\lambda$, $\tau = 3\lambda$

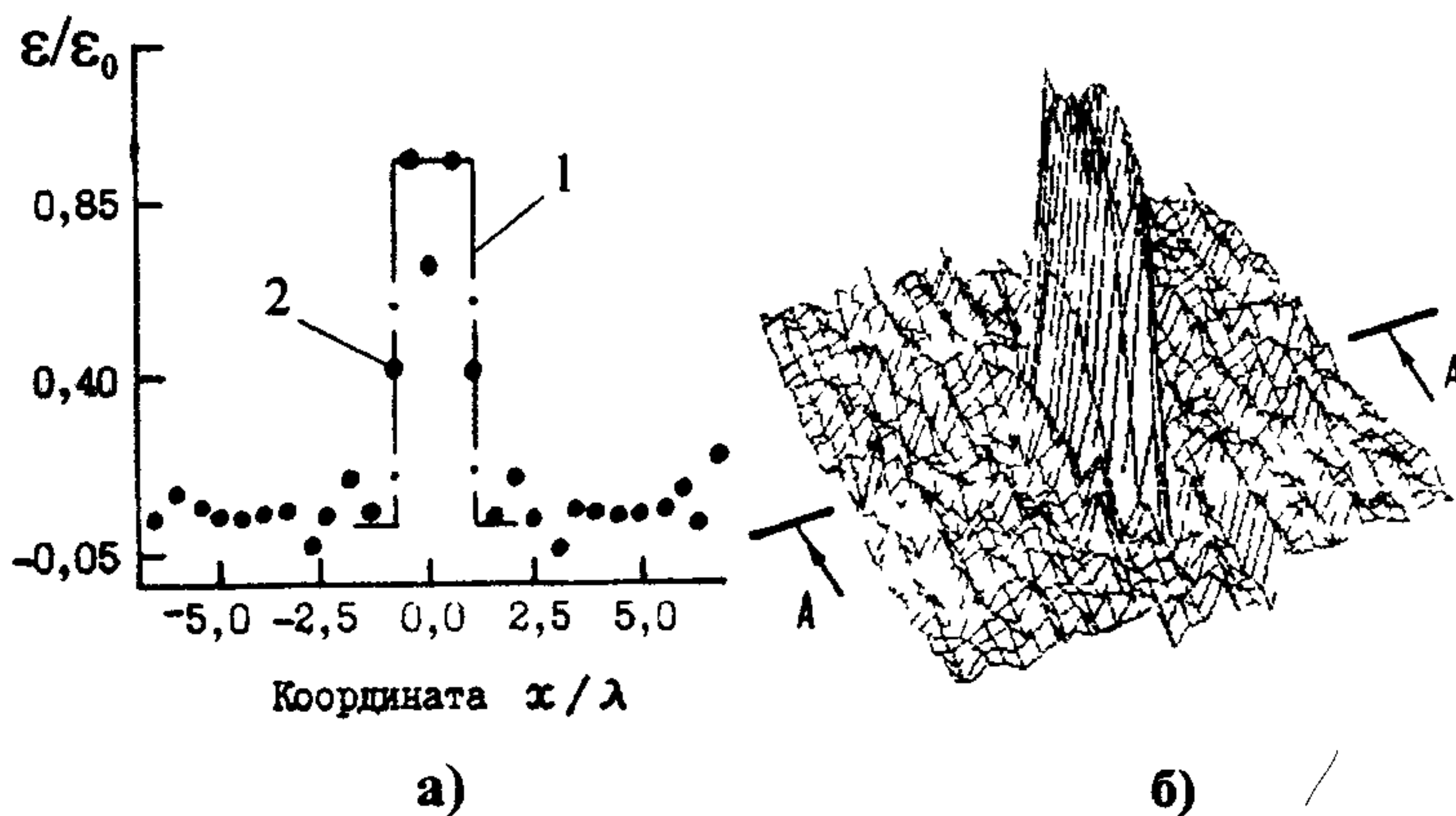


Рис. 5.13 Интерполяционная реконструкция неоднородности вида (5.79) без вторичной фильтрации сечение в плоскости А-А (а) и центральная проекция (б) 1 - истинные значения; 2 - восстановленные значения, $\Delta c_{max} = 0,02c_0$, $R_0 = 4,25\lambda$, $a = 4\lambda$, $b = 1\lambda$

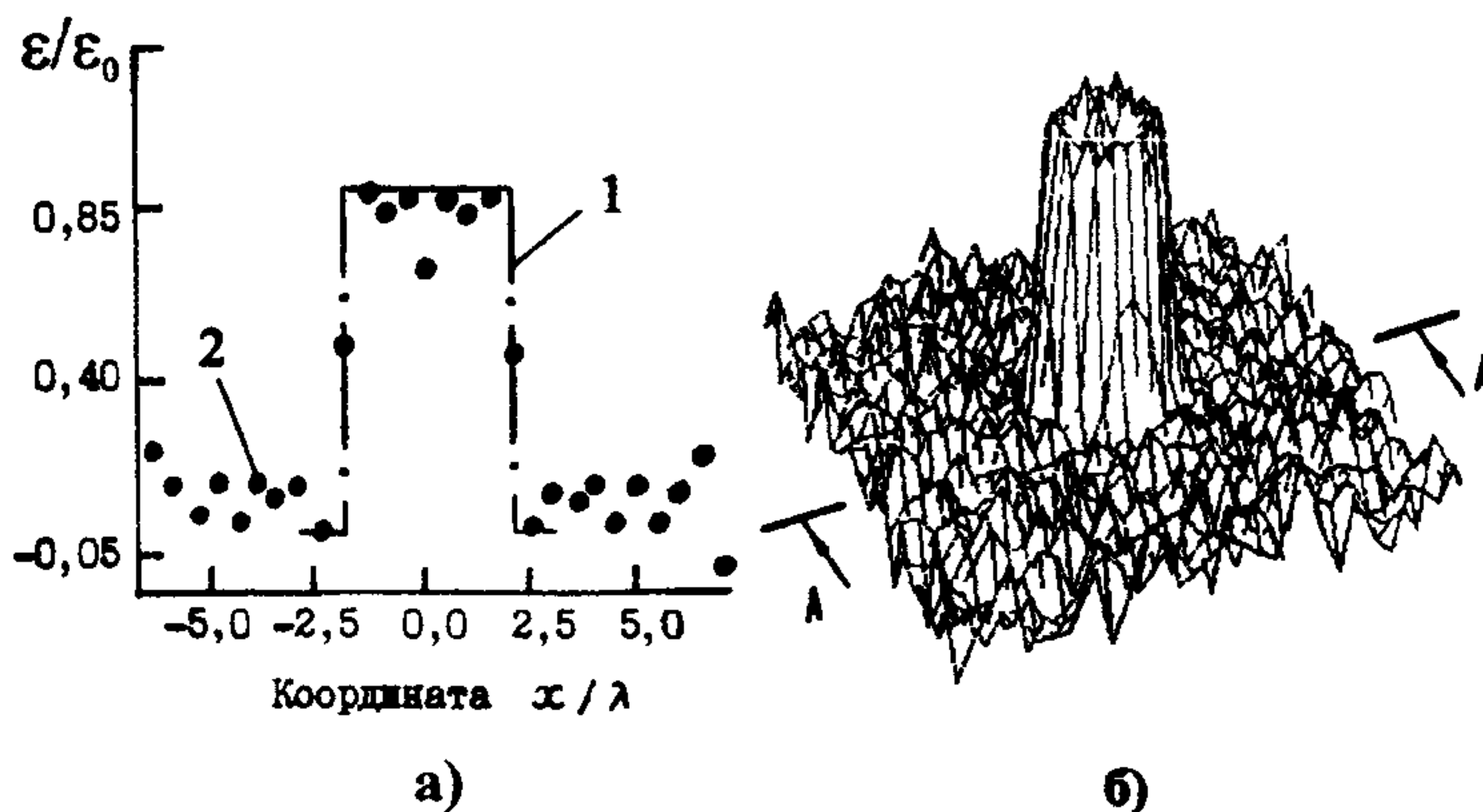


Рис. 5.14. Интерполяционная реконструкция неоднородности вида (5.78) без вторичной фильтрации сечение в плоскости А-А (а) и центральная проекция (б) 1 - истинные значения; 2 - восстановленные значения, $\Delta c_{max} = 0,02c_0$, $R_0 = 4,25\lambda$, $R_{ц} = 2\lambda$

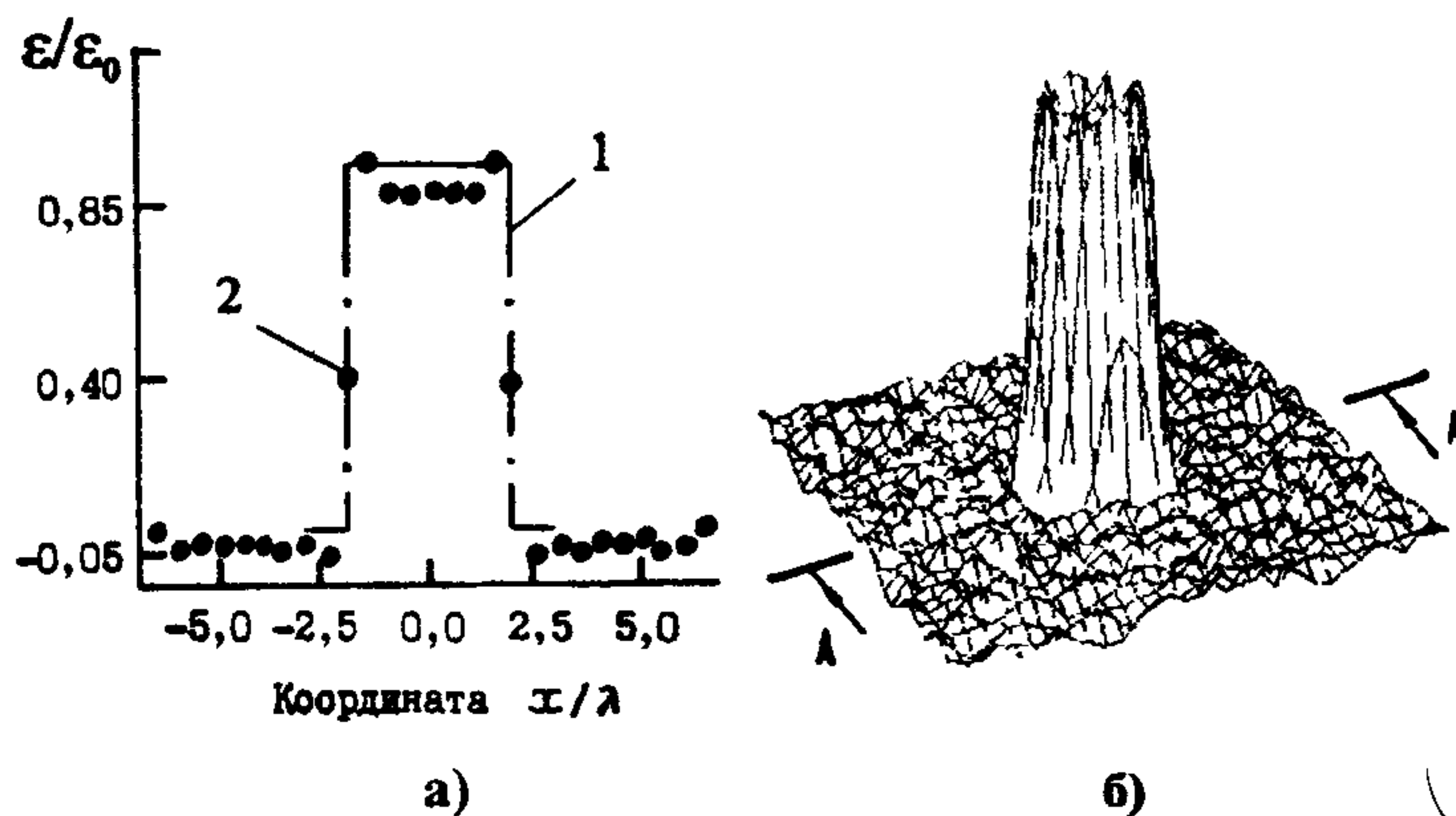


Рис. 5.15. Интерполяционная реконструкция неоднородности вида (5.78) после вторичной фильтрации сечение в плоскости А-А (а) и центральная проекция (б). 1 - истинные значения; 2 - восстановленные значения, $\Delta c_{max} = 0,02c_0$, $R_0 = 4,25\lambda$, $R_{ц} = 2\lambda$

результаты реконструкции функции (5.78) после вторичной фильтрации (5.84).

Для сравнения и анализа возможностей томографических алгоритмов реконструкции разработаны различные тестовые рассеиватели, например модифицированный (для задач цифровой акустической интроскопии) вариант фантома Шеппа-Логана.

Таблица 5.2

Параметры модифицированного фантома Шеппа-Логана [28]

Эллипс	Координаты центра	Большая полуось a	Малая полуось b	Угол поворота θ	Уровень яркости
A	(0,00, 0,00)	0,92	0,69	90	1,0
B	(0,00, -0,0184)	0,874	0,6624	90	-0,5
C	(0,22; 0,00)	0,31	0,11	72	-0,2
D	(-0,22; 0,00)	0,41	0,16	108	-0,2
E	(0,00; 0,35)	0,25	0,21	90	0,1
F	(0,00; 0,10)	0,046	0,046	0	0,15
G	(0,00, -0,10)	0,046	0,046	0	0,15
H	(-0,08; -0,605)	0,046	0,023	0	0,15
I	(0,00; -0,605)	0,023	0,023	0	0,15
J	(0,06; -0,605)	0,046	0,023	90	0,15

Базовый вариант фантома Шеппа-Логана, моделирующий поглощательную способность тканей головного мозга, получил широкое распространение для тестирования алгоритмов рентгеновской томографии. Фантом представляет собой суперпозицию эллипсов, имеющих различную ориентацию. Внутри каждого отдельного эллипса функция имеет некоторое постоянное значение. В местах перекрытия эллипсов величина $\epsilon(x, y)$ определяется как среднее арифметическое ϵ_{0l} каждого l -го эллипса. Параметры модифицированного фантома Шеппа-Логана представлены в табл. 5.2. Главным преимуществом такого фантома является локальность его пространственного спектра, сочетающаяся с возможностью получения

его аналитического выражения. Действительно, поскольку образ Фурье эллипса с большой полуосью a и малой полуосью b , центр которого смещен в точку (x_0, y_0) , а большая полуось образует угол θ с положительным направлением оси Ox , имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(l_x, l_y) = & \epsilon_0 \exp \{-j(l_x x_0 + l_y y_0)\} \times \\ & \times \frac{a J_1 \left\{ b \left[\left((l_x \cos \theta + l_y \sin \theta) \frac{a}{b} \right)^2 + (-l_x \sin \theta + l_y \cos \theta)^2 \right]^2 \right\}^{1/2}}{\left[\left((l_x \cos \theta + l_y \sin \theta) \frac{a}{b} \right)^2 + (-l_x \sin \theta + l_y \cos \theta)^2 \right]^2}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

то итоговый пространственный спектр фантома представляет собой суперпозицию образов Фурье отдельных эллипсов, определенных в табл. 5.2.

Учтя высокую размерность задачи, произведем предварительную обработку измерительных данных, которая позволит исключить многочисленные пересечения окружностей данных в спектральном пространстве (см. рис. 5.6).

Каждый дискретный отсчет декартовой сетки $(m'\Delta, n'\Delta)$ располагается между двумя аксиальными окружностями радиусов r_j и r_{j+1} (где j - порядковый номер направления приема плоской волны, рассеянной неоднородностью). В свою очередь каждый интерполируемый отсчет совпадает с одной из окружностей. Если пределы изменения параметров α_i и β_j таковы, что $0 \leq \alpha_i \leq 2\pi$ и $0 \leq \beta_j \leq k_0$, то через каждую точку, имеющую координаты $(m'\Delta, n'\Delta)$, может проходить лишь одна окружность данных, соответствующая i -му направлению сканирования (рис. 5.16).

Тогда значения i и j могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} i_1 \leq i = \frac{\operatorname{arctg} \{ (\tilde{\gamma} l_y - \beta l_x) / (\tilde{\gamma} l_x - \beta l_y) \}}{\Delta \alpha} \leq i_1 + 1; \\ j_1 \leq j = \frac{r_j \sqrt{1 - (r_j / 2k_0)}}{\Delta l} \leq j_1 + 1, \end{aligned} \quad (5.86)$$

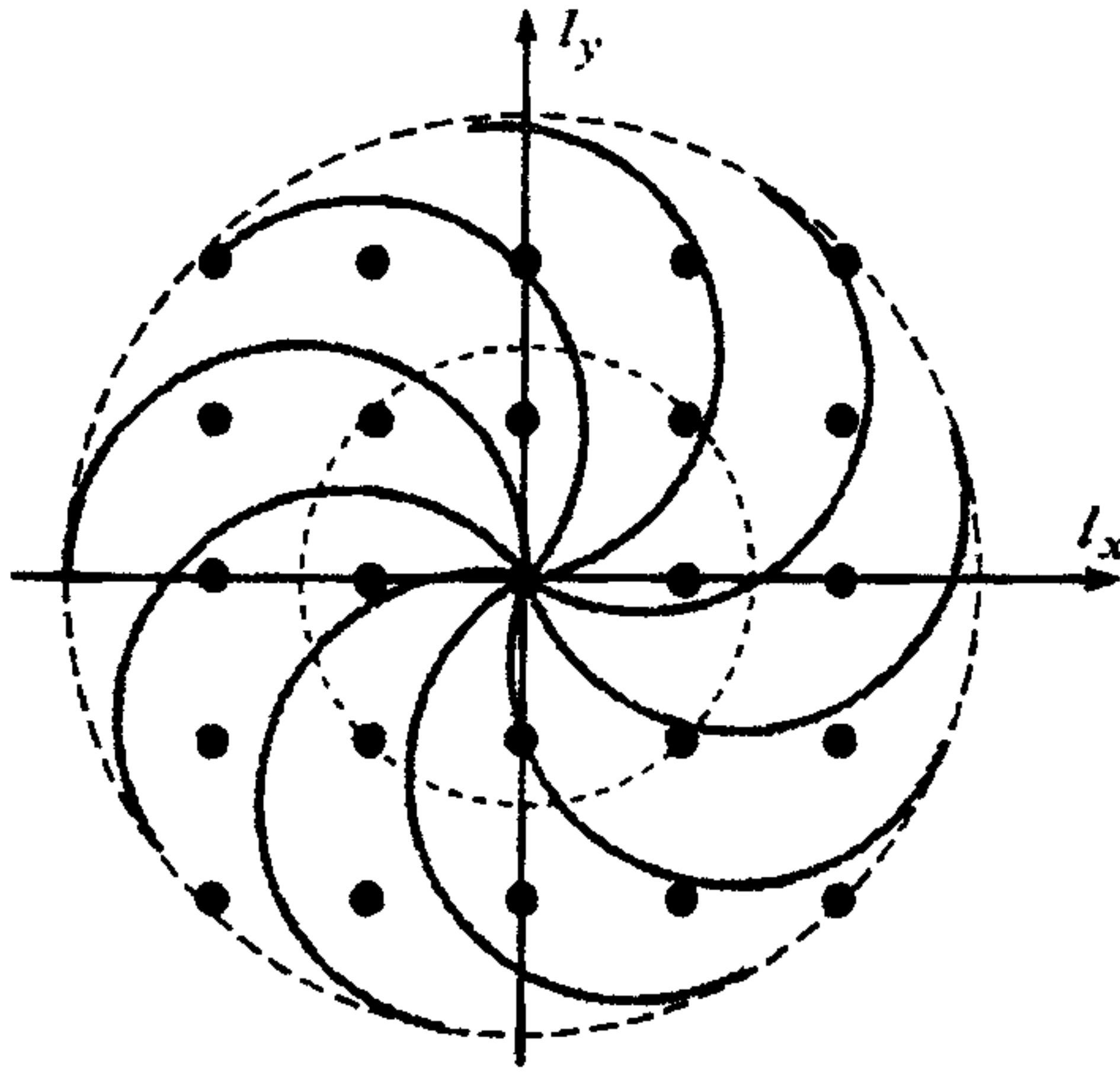


Рис. 5.16. Заполнение области пространственных частот без перекрытий

где $r_j = \sqrt{(m'\Delta l)^2 + (n'\Delta l)^2}$, $\beta = j\Delta l$, $\tilde{\gamma} = \sqrt{k_0^2 - \beta^2} - k_0$, $\Delta\alpha = 2\pi/I_\alpha$. После того, как найдены значения i и j , а следовательно, i_1 и j_1 , можно вычислить расстояния

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \sqrt{(m'\Delta l - l_x(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}))^2 + (n'\Delta l - l_y(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}))^2}; \\
 d_2 &= \sqrt{(m'\Delta l - l_x(\alpha_{i_1+1}, \beta_{j_1}))^2 + (n'\Delta l - l_y(\alpha_{i_1+1}, \beta_{j_1}))^2}; \\
 d_3 &= \sqrt{(m'\Delta l - l_x(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1+1}))^2 + (n'\Delta l - l_y(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1+1}))^2}; \\
 d_4 &= \sqrt{(m'\Delta l - l_x(\alpha_{i_1+1}, \beta_{j_1+1}))^2 + (n'\Delta l - l_y(\alpha_{i_1+1}, \beta_{j_1+1}))^2}
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

и определить значения $\tilde{\epsilon}(m'\Delta, n'\Delta)$ по формуле

$$\tilde{\epsilon}(m'\Delta, n'\Delta) = \frac{\frac{1}{d_1}\tilde{\epsilon}_{i_1, j_1} + \frac{1}{d_2}\tilde{\epsilon}_{i_1+1, j_1} + \frac{1}{d_3}\tilde{\epsilon}_{i_1, j_1+1} + \frac{1}{d_4}\tilde{\epsilon}_{i_1+1, j_1+1}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4}}. \tag{5.88}$$

На рис. 5.17 и 5.18 приведены изображения фантомов, восстановлен-

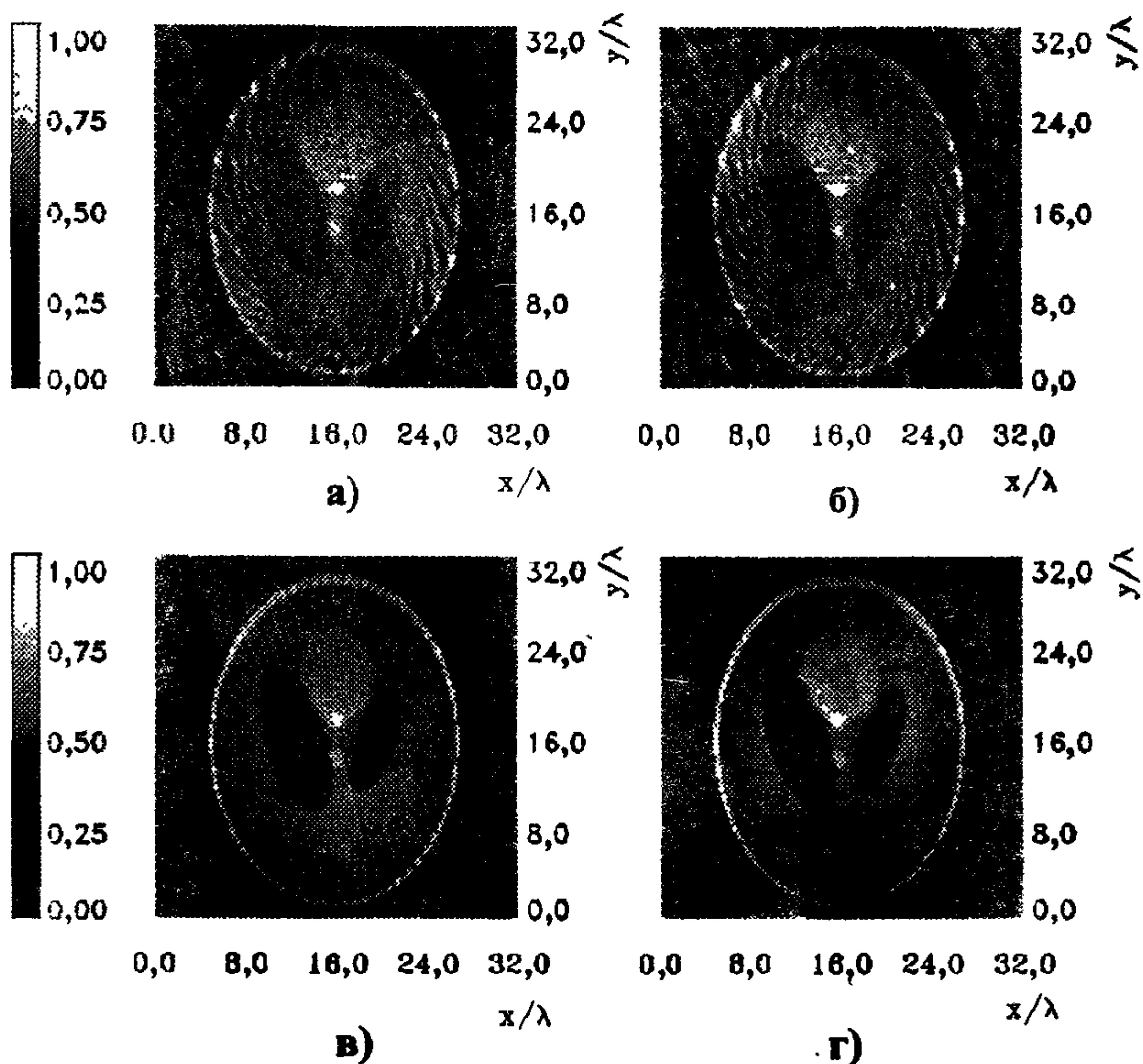


Рис. 5.17. Прямая фурье-реконструкция тестового фантома Шеппа-Логана. Параметры реконструкции: $N = 128$; $\delta = \lambda/4$; $J_\beta = 180$, $I_\alpha = 15$ (а), 30 (б), 90 (в), 180 (г)

ные с помощью прямой фурье-реконструкции (5.76) и интерполяционного алгоритма (5.46), в котором применялась билинейная интерполяция вида (5.88).

Собственно графическое воспроизведение изображений осуществлялось с использованием функциональных возможностей пакета IDL (Interactive Data Language). Разработанный еще в 1977 году

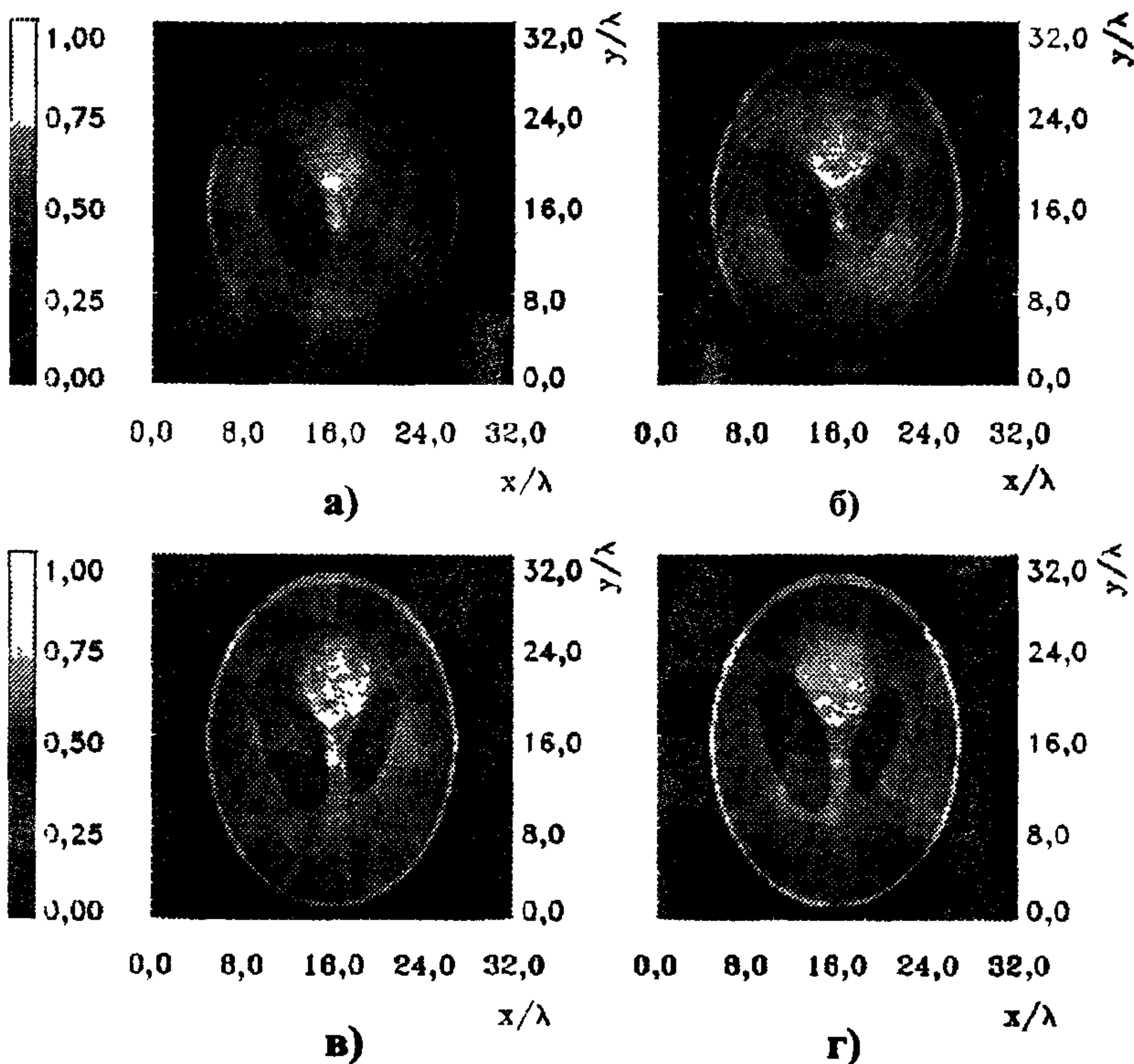


Рис. 5.18. Интерполяционная билинейная фурье-реконструкция тестового фантома Шеппа-Логана. Параметры реконструкции: $N = 128$; $\delta = \lambda/4$; $J_\beta = 180$, $I_\alpha = 15$ (а), 30 (б), 90 (в), 180 (г)

компанией Research Systems, Inc. пакет IDL является в настоящее время одним из наиболее часто используемых пакетов для анализа и визуализации научных и инженерных данных. Благодаря положенному в его основу мощному векторно-ориентированному языку, поддержанному многочисленными средствами математического анализа, развитой средой матричных вычислений и решения систем уравнений, процедурами обработки сигналов и изображе-

ний, интерпретации образов, эффективной техникой графического отображения и графическим интерфейсом пользователя, IDL становится базовым средством во многих инженерных областях. В силу перечисленных обстоятельств IDL получил также широкое распространение в области биомедицинского компьютерного моделирования. Многие производители биомедицинского оборудования избирают в настоящее время IDL в качестве стандарта программирования в компьютерных системах визуализации и диагностики. К сожалению, в России пакет IDL официально не распространяется. Тем не менее, к настоящему времени доступна пятая (демонстрационная) версия пакета для Windows-платформ с ограничениями (невозможностью сохранения rgo-файлов и лимитом времени работы в 7 минут) на сервере разработчика <http://www.rsinc.com>. Аналогичная версия доступна на ftp-сервере: <ftp.rsinc.com>. Там же расположены дополнительные библиотеки и программы для работы с IDL.

6. Учет многократных рассеяний в акустических обратных задачах томографического типа

6.1. Итерационная процедура реконструкции контрастных неоднородностей в пространстве Фурье

Как было показано в § 5.3, уравнение рассеяния, записанное в интегральной форме, имеет вид (5.24). Используя введенное понятие амплитуды рассеяния $f(k_0\mathbf{s}^\beta, k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$ и учитывая, что полное поле на области рассеяния \mathcal{R} может быть представлено в (5.26) в виде суммы $U(\mathbf{r}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) = \exp\{jk_0\mathbf{s}_0^\alpha \cdot \mathbf{r}\} + u(\mathbf{r}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$, будем иметь

$$f(k_0\mathbf{s}^\beta, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0\mathbf{s}^\beta \cdot \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) d\mathbf{r}, \quad (6.1)$$

где $u(\mathbf{r}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$ - ненулевое рассеянное поле на области локализации рассеивателя. Уравнение (6.1) получено в предположении, что лоцирующее поле представляет собой плоское монохроматическое колебание единичной амплитуды вида (5.12). При этом значения пространственного спектра неоднородности $\tilde{\epsilon}(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$ определяются по формуле (5.34).

Запишем (6.1) относительно $\tilde{\epsilon}(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$:

$$\tilde{\epsilon}(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha) = f(k_0\mathbf{s}^\beta, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) - \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0\mathbf{s}^\beta \cdot \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) d\mathbf{r}. \quad (6.2)$$

Как известно из теории рассеяния, ненулевые значения $f(k_0\mathbf{s}^\beta, k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$ порождаются излучающими источниками рассеянного поля и могут регистрироваться в эксперименте (см. пояснения к рис. 5.9). Обратная задача в постановке (6.2) состоит, таким образом, в определении компонент пространственного спектра неоднородности $\tilde{\epsilon}(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$ на основании экспериментально определенных ам-

плитуд рассеяния $f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$, зарегистрированных в количестве, достаточном для формирования адекватного конечномерного описания истинного рассеивателя.

Введенное ранее приближение Борна (5.13) соответствует пренебрежению вкладом интегрального члена в правой части (6.2). Методы томографической реконструкции акустических рассеивателей, для которых удовлетворено условие (5.13), описаны в предыдущей главе. Здесь будем рассматривать такие неоднородности, которые создают на \mathcal{R} рассеянные поля, сравнимые по величине с $U_0(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$, но не превосходящие его.

Для определения $u(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ в (6.2) воспользуемся тем, что уравнение рассеяния (5.24) может быть аналогичным образом записано для случая, когда точка наблюдения \mathbf{r} и текущая координата \mathbf{r}' принадлежат области \mathcal{R} :

$$U(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = U_0(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) \epsilon(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) d\mathbf{r}'. \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) является нелинейным относительно искомой функции $U(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ (рассеянное поле в данном случае есть полное поле в каждой точке $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ за вычетом падающего поля). Представим (6.3) в операторном виде:

$$U = U_0 + \hat{G} \hat{\epsilon} U, \quad (6.4)$$

где \hat{G} - интегральный гриновский оператор; $\hat{\epsilon}$ - оператор умножения на функцию $\epsilon(\mathbf{r})$.

Будем рассматривать полные поля на области рассеяния как элементы пространства L_2 . Тогда, если оператор $\hat{G} \hat{\epsilon}$ - сжимающий, т.е. выполняется условие

$$\|\hat{G} \hat{\epsilon}\|_{L_2} < t, \quad 0 \leq t < 1, \quad (6.5)$$

то в L_2 существует единственное решение U_G такое, что произвольная последовательность вида

$$U_{j+1} = U_0 + \hat{G} \hat{\epsilon} U_j \quad (6.6)$$

(где U_j - оценка функции $U(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$, получаемая на j -м итерационном шаге) сходится к U_G при $k \rightarrow \infty$, а скорость сходимости итерационного процесса (6.6) определяется соотношением

$$\|U - U_j\| \leq \frac{t^{k+1}}{1-t} \|U - U_G\|_{L_2}. \quad (6.7)$$

С математической точки зрения конструирование итерационной процедуры (6.6) при выполнении условия (6.5) соответствует разложению уравнения (6.4) в ряд по итерированным ядрам

$$U = \left[\hat{E} + \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{G} \hat{\epsilon})^{j-1} \right] U_0, \quad (6.8)$$

где \hat{E} - единичный оператор на \mathcal{R} такой что

$$\hat{E}U_0(\mathbf{r}') \equiv \int_{\mathcal{R}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = U_0(\mathbf{r}). \quad (6.9)$$

Выражение (6.8) известно в теории рассеяния как борновский ряд (ряд Борна - Неймана). Физический смысл выражения (6.8) применительно к рассматриваемой задаче (6.3) состоит в учете многократных рассеяний падающего поля $U_0(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ на акустической неоднородности $\epsilon(\mathbf{r})$, локализованной в \mathcal{R} , при условии, что неравенство (6.5) справедливо. Однако требование $\|\hat{G} \hat{\epsilon}\| < 1$ (или $\|\hat{\epsilon} \hat{G}\| < 1$) - необходимое условие для формулировки уравнения рассеяния в виде ряда Борна - Неймана - является чрезвычайно жестким; существует широкий класс рассеивателей, представляющих практический интерес, для которых ряд (6.8) расходится.

Ряд Борна - Неймана служит, таким образом, основой для предварительной классификации рассеивателей по их «рассеивающей силе», т.е. по кратности эффектов рассеяния зондирующего поля.

По силе рассеяния акустические неоднородности могут быть подразделены на три класса. слабые неоднородности, неоднородности средней силы и сильные неоднородности. Принадлежность ре-

конструируемой неоднородности к одному из этих классов определяет выбор того или иного алгоритма восстановления и вычислительные затраты, необходимые для решения соответствующей ОЗР.

Слабыми с точки зрения ОЗР являются рассеивающие неоднородности, лишь незначительно искажающие падающее поле. Дифракционная картина рассеянного поля, создаваемого такими рассеивателями, хорошо описывается борновским приближением однократного рассеяния. В частности, неоднородность рефракционного типа является слабой, если ее характеристики удовлетворяют неравенству

$$D \left| 1 - \frac{c_0}{c(\mathbf{r})} \right| \ll \lambda,$$

где $D \approx 2R_0$ - линейный размер неоднородности. На практике слабыми рассеивателями являются, например, неоднородности мягких, жидкостно-подобных биологических тканей.

Неоднородности средней силы, как уже было отмечено, создают рассеянные поля, сравнимые, но уступающие по интенсивности падающему полю во всей области рассеяния. Процесс рассеяния на неоднородностях средней силы хорошо описывается конечным числом ряда Борна - Неймана, но первое приближение для этой цели непригодно. Важное место при решении ОЗР для рассеивателей средней силы занимает сходимость итерационных процессов, которая в ряде случаев является экспоненциальной. Примером рассеивателей данного типа при соответствующем выборе частоты сканирования могут служить сложные биологические структуры - сердце, печень, почка и т.п.

Сильными рассеивателями являются неоднородности, создающие рассеянное поле, превышающее по интенсивности поле падающее. Борновский ряд для таких неоднородностей в большинстве случаев расходится и, следовательно, не может использоваться для описания рассеянного поля. В гидроакустике, сейсмолокации, УЗ дефектоскопии и неразрушающем контроле, как правило, приходится иметь дело именно с сильными рассеивателями. Несмотря на

интенсивное теоретическое изучение, сопровождаемое множеством численных экспериментов, практически значимые решения подобных ОЗР продемонстрированы лишь для рассеивателей, описываемых сравнительно небольшим числом параметров либо с использованием существенных приближений.

Помимо математических трудностей, возникающих при практической реализации дискретных вариантов (5.24) и (6.3), имеет место ряд вопросов, причиной возникновения которых является физическое содержание ОЗР (в том числе в томографической постановке). Особую актуальность данные вопросы приобретают на этапе точного (а не линеаризованного) решения задачи, т.е. когда восстановление изначально непрерывного объекта производится с учетом многократных рассеяний на основе дискретного варианта уравнения рассеяния.

Дело в том, что истинный рассеиватель - суть материальный объект, изначально имеющий тонкую структуру. Однако когда говорят о томографической реконструкции, имеют в виду не исходную рассеивающую материальную структуру, а некоторую сглаженную модель неоднородности. В борновском или рытовском вариантах такая подмена объекта моделью не вызывает сомнений. Действительно, поскольку возмущение исследуемой области производится падающим полем, имеющим определенную длину волны λ , то взаимодействие исходного излучения со структурными неоднородностями, характерные размеры которых порядка долей длины волны, не влияет на результирующую картину рассеянного поля. В этом смысле действие падающего скалярного поля сводится к низкочастотной фильтрации (т.е. сглаживанию) рассеивающей неоднородности. В результате такого сглаживания становится возможным исходный объект характеризовать некоторой гладкой функцией координат, а рассеянное поле описывать, используя аппарат функции Грина применительно к образуемым источникам. Так, соотношения (5.19) и (5.21) позволяют в рамках данной модели установить связь пространственного спектра рассеянного поля со спектраль-

ными характеристиками неоднородности $\tilde{\xi}(\Lambda)$, и на первый план в данном случае выступают вопросы согласования дискретных сеток $\tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha)$, а также вычислительные проблемы, описанные выше. Аналогичная ситуация имеет место при экспериментальной регистрации амплитуд рассеяния и их последующей обработке, в частности, с помощью (5.33).

Учет многократных рассеяний падающего излучения на области \mathcal{R} , напротив, предполагает использование всего многообразия возмущений среды, в том числе и тех, для которых $|\mathbf{k}| \neq k_0$. Это, естественно, приводит к необходимости доопределения элементов T -матрицы при фиксированном \mathbf{s}_0^α не только внутри, но и вне круга радиуса k_0 , что влечет за собой расширение спектрального пространства возможных значений аргументов $T(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$.

Поясним сказанное примером. Пусть неоднородность $\epsilon(\mathbf{r})$ имеет ограниченный пространственный спектр, задаваемый функцией

$$\tilde{I}(k_x, k_y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)} \leq \Lambda_{max}, \\ 0, & \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)} > \Lambda_{max}, \end{cases} \quad (6.10)$$

где граничная пространственная частота Λ_{max} удовлетворяет условию $\Lambda_{max} \leq k_0$. Если неоднородность облучается плоской волной единичной амплитуды (5.12), пространственный спектр которой представим, как известно, в виде δ -функции, а именно, $\tilde{U}(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$, то после применения преобразования Фурье к уравнению (6.3) будем иметь

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \frac{1}{k^2 - k_0^2 + j\kappa} \int_{\mathcal{K}} \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}') \tilde{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (6.11)$$

где κ - малая положительная величина, вводимая с целью формального исключения сингулярности функции Грина на сфере Эвальда. Если решать (6.11) относительно $\tilde{U}(\mathbf{k})$ итерационно, то

$$\tilde{U}_{j+1}(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \frac{1}{k^2 - k_0^2 + j\kappa} \int_{\mathcal{K}} \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}') \tilde{U}_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (6.12)$$

Положив в (6.12) $\tilde{U}_0(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$, получим

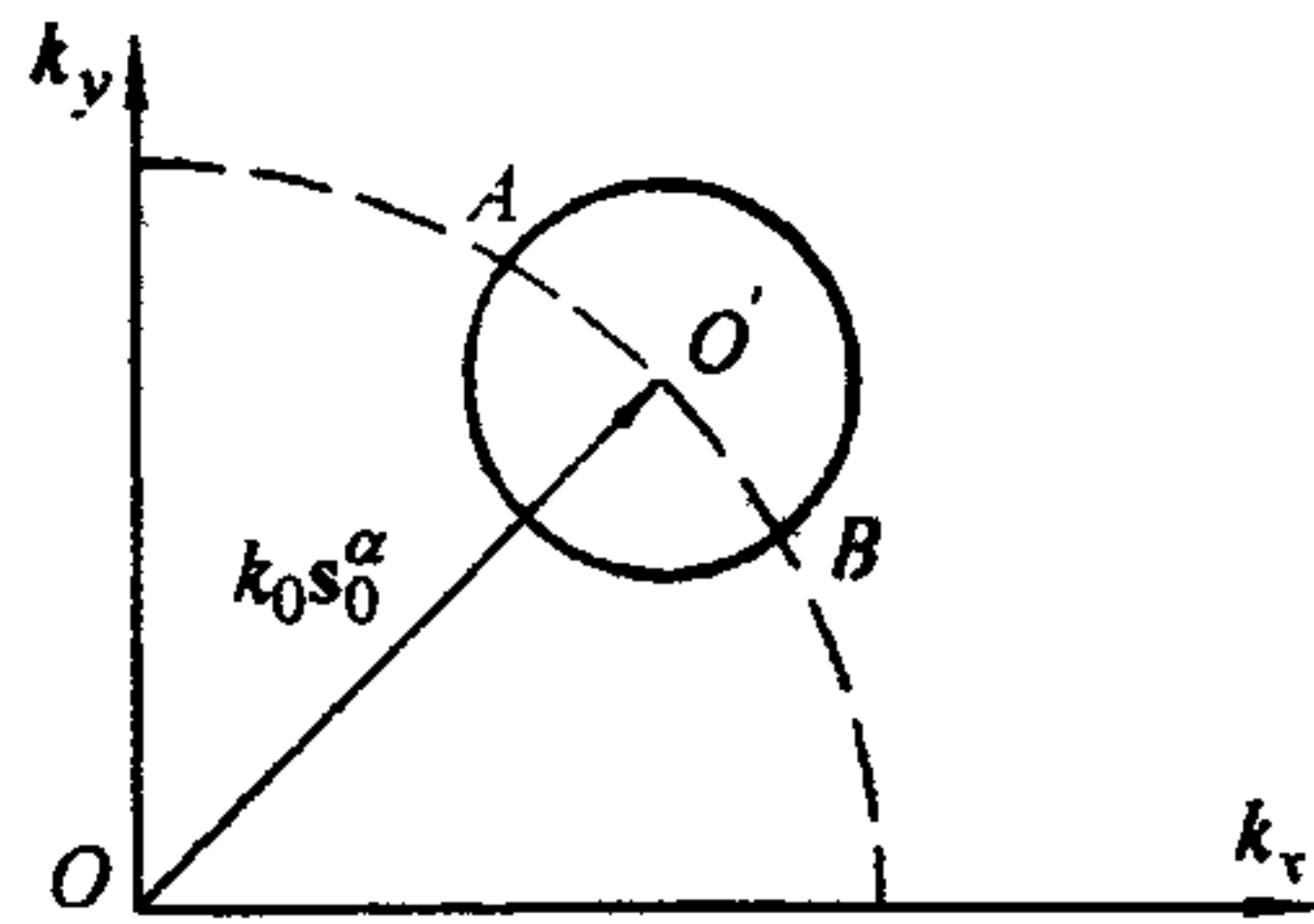
$$\tilde{U}_1(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \frac{\tilde{I}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)}{k^2 - k_0^2 + j\kappa}. \quad (6.13)$$

Из (6.13) следует, что если при вычислении значения $\tilde{U}_1(\mathbf{k})$ свертка в интеграле производилась с отдельной δ -функцией, то уже при учете первого акта перерассеяния значение интеграла будет определяться сверткой $\tilde{I}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ с функцией вида $\tilde{I}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) / (k^2 - k_0^2 + j\kappa)$. Областью аргументов данной функции является часть окружности радиуса k_0 , ограниченная размерами финитного носителя функции $\tilde{I}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$. Выражение для $\tilde{U}_2(\mathbf{k})$ запишется в виде

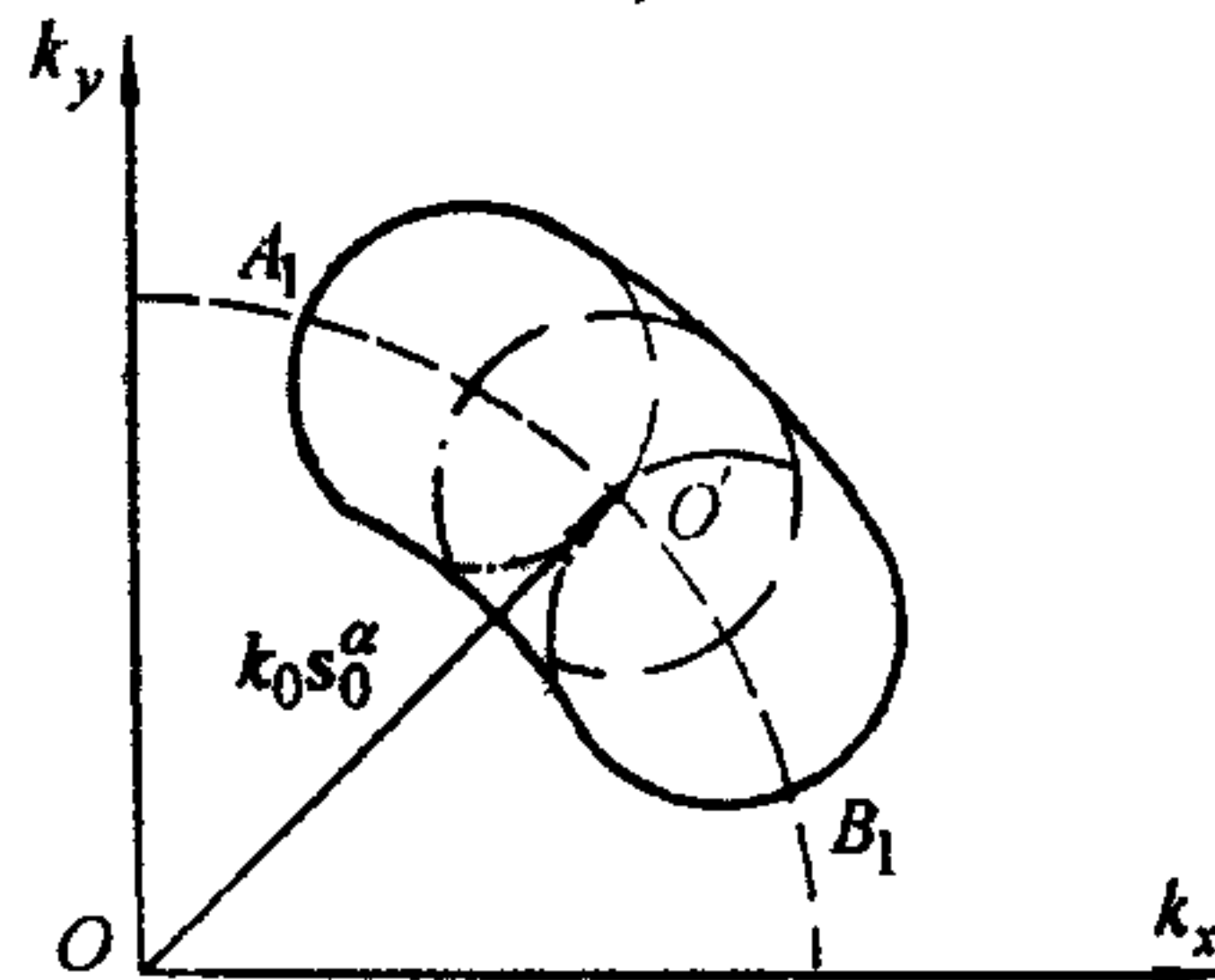
$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(\mathbf{k}) = & \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \frac{\tilde{I}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)}{k^2 - k_0^2 + j\kappa} + \\ & + \frac{1}{k^2 - k_0^2 + j\kappa} \int_{\mathcal{K}} \frac{\tilde{I}(\mathbf{k}') \tilde{I}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'}{k'^2 - k_0^2 + j\kappa}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

На рис. 6.1 проиллюстрированы геометрические места компонент пространственных спектров вторичных источников $T_j(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ для различных значений $\tilde{U}_j(\mathbf{k})$. Из рисунка видно, что даже в том случае, когда исходный объект имеет достаточно ограниченный пространственный спектр, учет многократных рассеяний приводит к m -кратному расширению пространственного спектра источников вторичного излучения (m - кратность рассеяния). Что же касается сильных неоднородностей, для которых борновский ряд суммирования по перерассеяниям расходится, то вопрос их дискретизации требует дополнительной проработки.

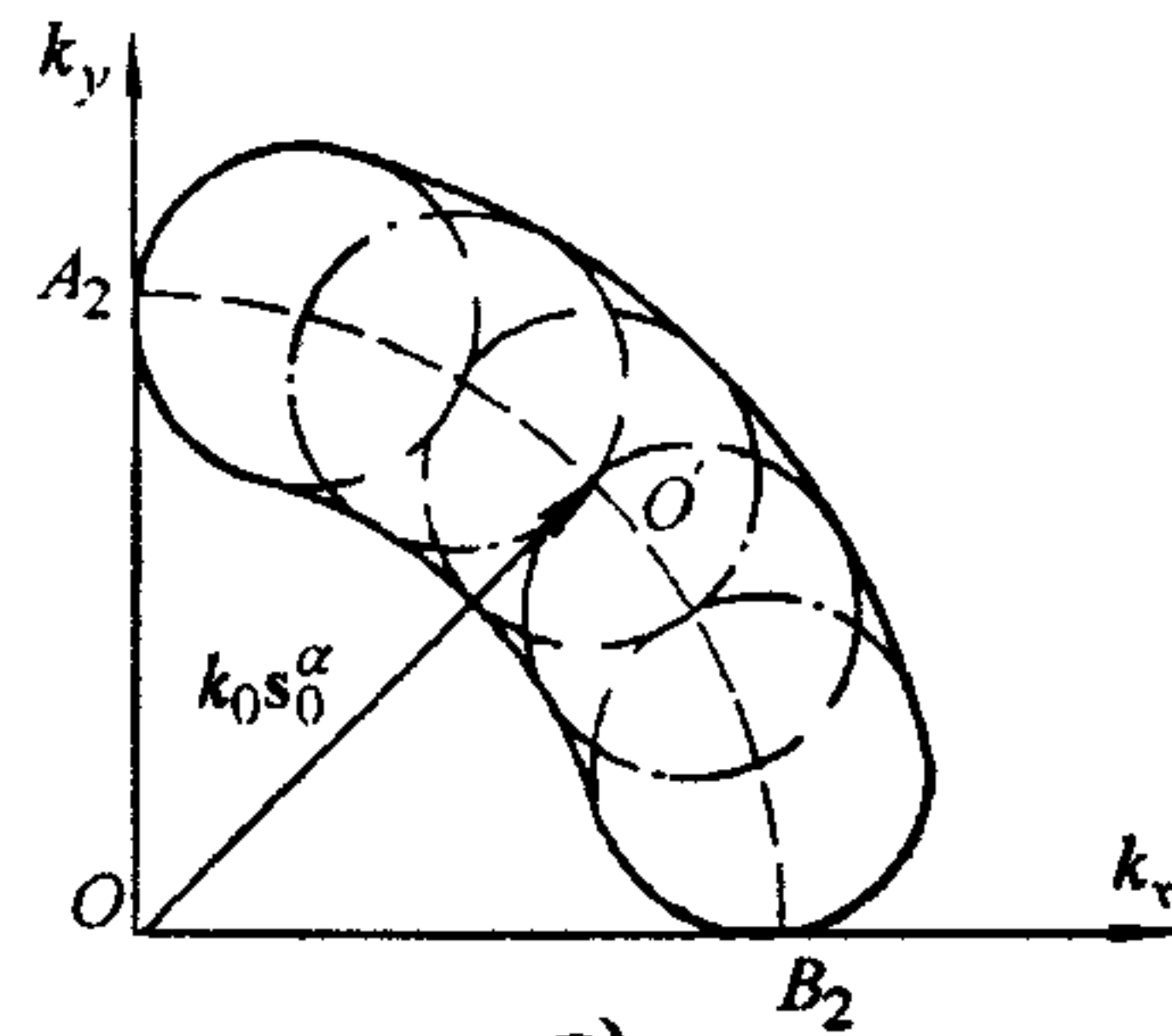
Отметим, что аналогичный результат получен и в процессе функционально-аналитического исследования ОЗР. В частности, справедлива оценка: если задается относительная погрешность σ , с которой должно вычисляться рассеянное поле, то для получения требуемой точности можно ограничиться учетом лишь m слагаемых



а)



б)



в)

Рис. 6.1. Расширение пространственного спектра источников вторичного излучения в процессе итерационного решения ПЗР: а - борновское приближение $T^{(B)}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$; б - двукратное рассеяние $T_2(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$; в - трехкратное рассеяние $T_3(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$

в ряде Борна - Неймана:

$$m \simeq \frac{2 \ln \sigma}{\ln \left(\frac{E_0}{E_{sc}} + 1 \right)},$$

где E_0 и E_{sc} - соответственно энергии падающего и рассеянного полей, запасенные в объеме $V_{\mathcal{R}}$ рассеивателя и усредненные по направлениям α падения плоской волны. Непосредственно в эксперименте можно измерить мощность рассеянного поля P_{sc} , излучаемого наружу, а также оценить мощность падающего поля P_0 по характерному линейному размеру рассеивателя D . Имея количественные оценки P_{sc} и P_0 , можно получить нижнюю оценку m_{min} кратности рассеяния:

$$m_{min} \simeq -\frac{2 \ln \sigma}{\ln (P_0/P_{sc} + 1)}. \quad (6.15)$$

Другими словами, реконструкция рассеивателя средней силы по приближенному алгоритму является правомерной только в том случае, когда его пространственный спектр сконцентрирован в круге $\Lambda_{max} \leq 2k_0/m_{min}$.

Итак, если условие (6.15) выполнено, то уравнение (6.3) можно записать в виде

$$u_j(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) \epsilon(\mathbf{r}') \{U_0(\mathbf{r}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + u_{j-1}(\mathbf{r}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)\} d\mathbf{r}'. \quad (6.16)$$

Дополним итерационную процедуру (6.16) соответствующим правилом останова: $\delta_1 = \delta_1(j)$. Пусть $\hat{u}(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = u_j(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ - решение (6.16), удовлетворяющее неравенству

$$\| \hat{u}(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) - u_{j-1}(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \| \leq \delta_1. \quad (6.17)$$

Подставляя $\hat{u}(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ в (6.2), будем иметь

$$\tilde{\epsilon}(k_0 \mathbf{s}^\beta - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) - \int_{\mathcal{R}} \exp\{-j k_0 \mathbf{s}^\beta \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) \hat{u}(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) d\mathbf{r}. \quad (6.18)$$

Вклад интегрального члена в (6.18) можно рассматривать как поправку к данным, обусловленную учетом многократных рассеяний с помощью (6.16). Система уравнений (6.16) - (6.18), дополненная начальными условиями $u_0(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = 0$ и $\epsilon^0(\mathbf{r}) = \epsilon^{(B)}(\mathbf{r})$,

где $\epsilon^{(B)}(\mathbf{r})$ - борновская оценка рассеивателя, составляет основу итерационного алгоритма реконструкции контрастной рефракционной неоднородности в пространстве Фурье

$$\tilde{\epsilon}^{i+1}(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha) = f(k_0\mathbf{s}^\beta, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) - \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0\mathbf{s}^\beta\mathbf{r}\} \epsilon^i(\mathbf{r}) \hat{u}(\mathbf{r}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) d\mathbf{r};$$

$$\hat{u}(\mathbf{r}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) \epsilon^i(\mathbf{r}') \{U_0(\mathbf{r}', k_0\mathbf{s}_0^\alpha) + u_{j-1}(\mathbf{r}', k_0\mathbf{s}_0^\alpha)\} d\mathbf{r}'$$
(6.19)

с некоторым условием останова, например,

$$\|\tilde{\epsilon}^{i+1}(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha) - \tilde{\epsilon}^i(k_0\mathbf{s}^\beta - k_0\mathbf{s}_0^\alpha)\|_{L_2} \leq \delta_2(i).$$
(6.20)

Уравнение рассеяния (6.3) можно записать в терминах операторов $T(\mathbf{k}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha)$

$$T(\mathbf{k}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) \equiv \int_{\mathcal{R}} \exp\{-j\mathbf{k}\mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) d\mathbf{r},$$
(6.21)

переводящих плоскую падающую волну с волновым вектором $k_0\mathbf{s}_0^\alpha$ в рассеянные волны с волновыми векторами \mathbf{k}

$$T(\mathbf{k}, k_0\mathbf{s}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - k_0\mathbf{s}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{K}} \tilde{G}(\mathbf{k}') T(\mathbf{k}', k_0\mathbf{s}_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}',$$
(6.22)

где $\tilde{G}(\mathbf{k}')$ - фурье-образ функции Грина. При выводе (6.22) использовано тождество

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \int_{\mathcal{K}} e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$
(6.23)

Из (6.22) видно, что интеграл в правой части берется по всем значениям аргумента \mathbf{k}' , и при использовании этого уравнения для решения прямых и обратных задач рассеяния необходима информация о значениях матричных элементов T -оператора для всех спектральных компонент, а не только для доступных при измерениях

в дальней зоне значений на энергетических поверхностях (см. также пояснения к формуле (5.29)). Поэтому так же, как и в (6.19), оказывается необходимым строить двухшаговую итерационную процедуру решения (6.2) - (6.22), основанную на попеременной оценке $T(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ и $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ для всех значений \mathbf{k} и $k_0 \mathbf{s}_0^\alpha$, либо более сложную процедуру, неявно содержащую такие оценки.

Для произвольного параметра α функция $T(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ является, согласно (5.29), образом Фурье вторичных источников $T(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$. При этом экспериментальному определению в (6.22) поддаются лишь излучающие компоненты в спектре рассеяния

$$f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}^\beta) T(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha).$$

Приняв во внимание, что $T(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ в (6.22) определена для любого $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$, запишем уравнение наблюдений в виде

$$f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}_0 \mathbf{s}^\beta - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \Delta T(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \quad (6.24)$$

или относительно $\tilde{\epsilon}$

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}_0 \mathbf{s}^\beta - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) - \Delta T(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha), \quad (6.25)$$

где

$$\Delta T(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \delta(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}^\beta) \int_{\mathcal{K}} \tilde{G}(\mathbf{k}') T(\mathbf{k}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'.$$

Включение интегрального члена в правой части (6.22) в уравнение наблюдений (6.24) позволяет при реконструкции пространственного спектра неоднородности оценить вклад неоднородных волн с волновыми векторами $|\mathbf{k}| > k_0$, а также возмущений среды неволновой природы ($|\mathbf{k}| < k_0$). Тогда

$$T_{j+1}(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{K}} \tilde{G}(\mathbf{k}') T_j(\mathbf{k}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (6.26)$$

Пусть $\hat{T}(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = T_j(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ - решение (6.26), а

$$\| T_j(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) - T_{j-1}(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \|_{L_2} \leq \delta_1(j) - \quad (6.27)$$

правило остановки итерационного процесса решения ПЗР в импульсном пространстве. Условие сходимости итерационной процедуры (6.27) тождественно (6.5). Подставив $\hat{T}(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha)$ в (6.25), получим

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}_0 \mathbf{s}^\beta - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) - \int_{\mathcal{K}} \tilde{G}(\mathbf{k}') \hat{T}(\mathbf{k}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (6.28)$$

В итоге будем иметь итерационный процесс, аналогичный (6.19), заключающийся в корректировке пространственного спектра рассеивателя на основе поэтапного уточнения решений соответствующих ПЗР, формулируемых в этом случае в импульсном пространстве:

$$\tilde{\epsilon}^{i+1}(\mathbf{k}_0 \mathbf{s}^\beta - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = f(k_0 \mathbf{s}^\beta, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) - \int_{\mathcal{K}} \tilde{G}(\mathbf{k}') \hat{T}(\mathbf{k}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \tilde{\epsilon}^i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (6.29)$$

$$T_{j+1}(\mathbf{k}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}^i(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{K}} \tilde{G}(\mathbf{k}') T_j(\mathbf{k}', k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) \tilde{\epsilon}^i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'.$$

Итерационный процесс (6.29) выполняется до тех пор, пока не станет справедливым неравенство (6.20).

6.2. Применимость модели

Чтобы оценить перспективы применения алгоритмов акустической диагностики томографического типа, реализующих учет многократных рассеяний, в целях биомедицинской интроскопии вернемся к приведенным в § 1.3 характерным значениям акустических параметров биологических тканей.

Как видно из табл. 1.2, вариации величины скорости звука в мягких тканях не превышают 5 % относительно среднего уровня

в 1490 м/с. Аналогичная картина имеет место и для плотности. В этом смысле задачи акустической биомедицинской интроскопии действительно соответствуют обратным задачам акустической реконструкции неоднородностей средней силы. При этом разделение вкладов рефракционной и плотностной неоднородностей достигается либо многочастотным сканированием, либо сканированием в двух иммерсионных средах.

Следует, кроме того, учитывать два важных обстоятельства.

Во-первых, разрешающая способность ультразвуковых приборов определяется прежде всего частотой зондирующего сигнала f_0 . Однако ограниченность приближенного (в данном случае итерационного) алгоритма не позволяет увеличить f_0 выше определенного значения. Если δ - характерный размер деталей рассеивателя, приемлемый в практике диагностирования, то содержательная (информативная) количественная визуализация возможна только в том случае, когда

$$\frac{c_0}{D} \ll f_0 \ll \frac{2 \delta c_0^3}{D^2 (\Delta c)^2},$$

где D - линейный размер области локализации рассеивателя; $\Delta c = \max_{\mathcal{R}} |c(\mathbf{r}) - c_0|$ известны априори.

Полагая $c_0 = 1490$ м/с, $\Delta c \sim 30$ м/с, $D \sim 5$ см и $\delta \sim 1$ мм, будем иметь оценочное значение для граничной рабочей частоты: $f_0 \ll 3$ МГц, что реально отвечает физическому содержанию задачи ультразвуковой диагностики.

Во-вторых, в алгоритме реконструкции не учитываются диссипативные процессы, вызываемые вязкостью и теплопроводностью среды, а также рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях. Действительно, в формуле (5.4) полагалось, что коэффициент поглощения $\alpha(\mathbf{r}) = 0$. Это в конечном счете дало возможность перейти к описанию функции неоднородности в форме (5.11). Однако, как видно из рис. 6 2, для реальных биомедицинских структур величина коэффициента поглощения существенно зависит от характера ткани и может изменяться более чем на 2 дБ на одном сантиметре

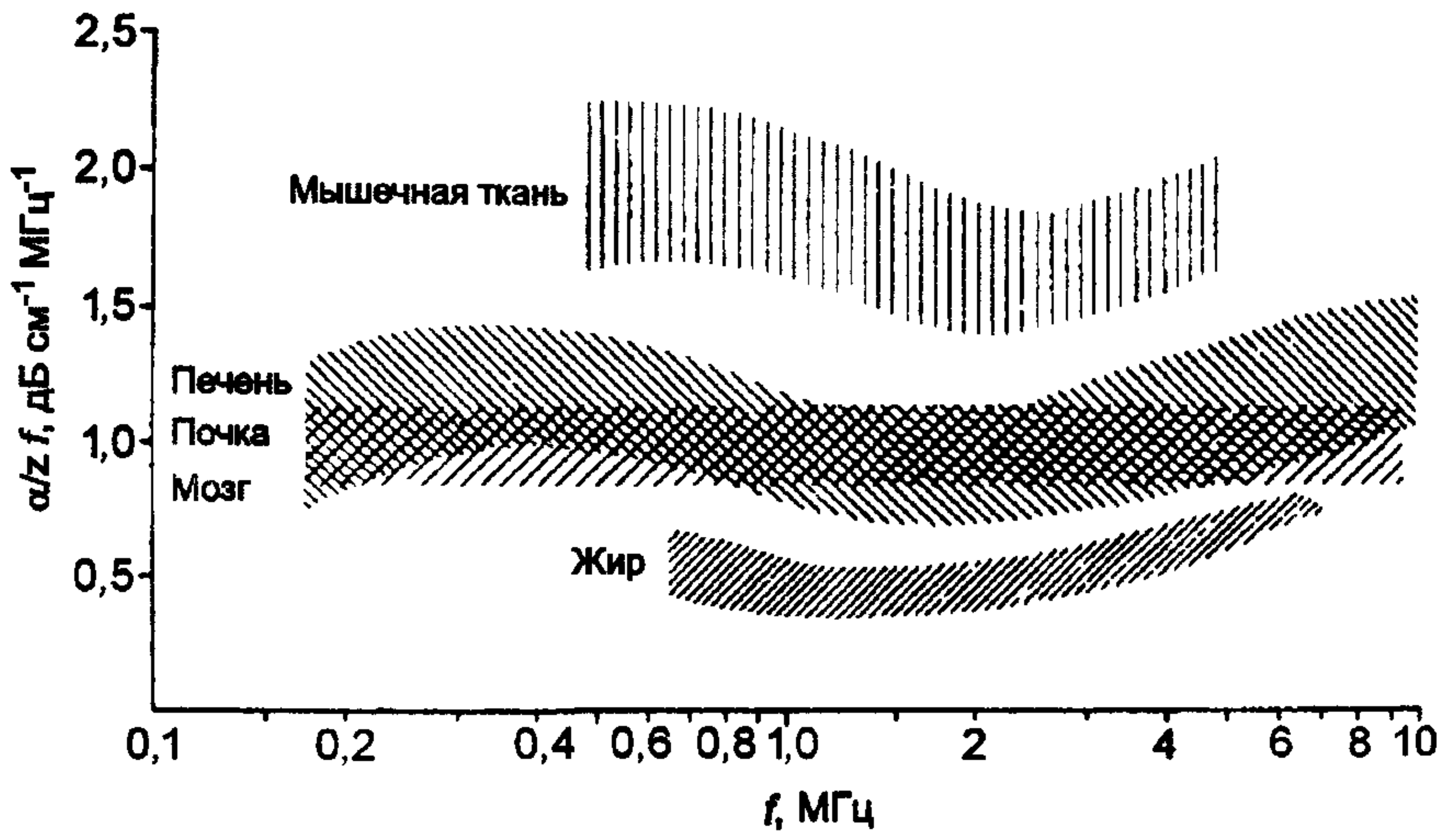


Рис. 6.2. Поглощающая способность биомедицинских тканей в диапазоне частот медицинского ультразвука [24]

распространения ультразвуковой волны (см., например, на рисунке данные для жировой и мышечной тканей на частоте 1 МГц). Учет фактора поглощения и связанного с ним изменения характера распределения первичного поля на области рассеяния, а также неизбежных искажений волнового фронта требует более глубокого изучения, равно как математического и физического моделирования с использованием реальных биомедицинских фантомов.

7. Лучевая акустическая томография квазистационарных течений

7.1. Общие сведения

К настоящему времени сформулированы несколько методов, реализующих пространственное восстановление поля скоростей в исследуемом объеме на основе данных акустических томографических измерений. Последние исследования в этой области сосредоточены на трех основных направлениях: доплеровской вычислительной томографии (ВТ), дифракционной ВТ и акустических времяпролетных томографических измерениях.

Доплеровские системы ВТ могут функционировать в двух режимах, различающихся формой зондирующего сигнала. Первый режим - монохроматического сканирования - идентичен стандартной трансмиссионной ВТ. Проекционные данные не содержат при этом информации о продольном разрешении, а угловое разрешение определяется шириной лоцирующего пучка. Для реконструкции двумерного поля скоростей требуется многократное повторение процедуры сканирования в полном 180° интервале углов поворота приемно-излучательной системы. В импульсном доплеровском режиме уже двух ВТ изображений оказывается достаточно для получения первичной оценки величины и направления вектора скорости в произвольной точке плоскости измерений. Двухпозиционная методика съема данных позволяет производить обработку и отображение томографической информации в реальном масштабе времени. Улучшение реальных характеристик отношения сигнал/шум и качества изображения векторного поля может быть получено соответствующей обработкой набора цветных доплеровских сцен («color flow images»). Одно из главных применений методов доплеровской ВТ - пространственная визуализация кровотока.

Дифракционная ВТ использует в качестве первоначальных данных амплитуды и фазы рассеянного акустического поля, получа-

емые в процессе многоракурсного зондирования. Процедуры восстановления основываются здесь на обращении соответствующего линеаризованного волнового уравнения. В противоположность доплеровской ВТ не предполагается наличие дискретных рассеивателей, движущихся в потоке. Возмущение волнового фронта лоцирующего поля определяется взаимодействием акустической волны с движущейся средой и стационарными рефракционными неоднородностями в исследуемом объеме. Вопрос о практической применимости дифракционной ВТ векторных полей в неинвазивной диагностике остается до настоящего времени открытым.

Времяпролетные томографические измерения могут быть, напротив, эффективно применены во многих инженерных приложениях, где доплеровские или оптические методы оказываются нераспространенными (например, из-за отсутствия контрастных агентов или в диагностике оптически непрозрачных сред). Это объясняется простотой технической реализации и наличием хорошо разработанных методов регистрации скоростей потоков акустическими методами.

7.2. Времяпролетные томографические измерения потоков и проекционные соотношения

Будем рассматривать эксперимент по томографическому зондированию неоднородной движущейся среды ультразвуковыми импульсами в рамках уже использовавшейся ранее схемы параллельного сканирования (см. § 5.1 и рис. 5.3).

Предположим, что времена пролета ультразвуковых импульсов, излучаемых элементами передающей решетки TA , регистрируются поэлементно соответствующими датчиками приемной антенны RA , расположенной на противоположной стороне ограниченной области R , которая и представляет собой область реконструкции. Обе антенные решетки (TA и RA) располагаются на расстоянии l_0 от центра поворота приемно-передающей системы, и положение каждой пары

приемник - передатчик характеризуется координатой ζ в совмещенной системе координат (ζ, η) (см. рис. 5.3). Здесь вновь рассматривается лишь двумерная задача, хотя обобщение результатов на трехмерный случай не связано с принципиальными сложностями.

В рамках прямолинейной геометрической акустики эффективная фазовая скорость звука $c_f(\mathbf{r})$ в потоке с полем векторов скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ представляет собой суперпозицию локальной скорости звука $c(\mathbf{r}) = c_0 + \xi(\mathbf{r})$, где $\xi(\mathbf{r})$ - малые отклонения локальной скорости от среднего уровня c_0 и проекции вектора скорости V_α на направление распространения, характеризуемое единичным вектором $\mathbf{s}^\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$:

$$c_f(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}) + V_\alpha(\mathbf{r}), \quad (7.1)$$

где $V_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r})\mathbf{s}^\alpha$. Необходимо заметить, что уравнение (7.1) справедливо лишь для случая непротяженных томографических систем. В общем случае звуковая энергия распространяется в движущейся среде с лучевой скоростью

$$\mathbf{c}_s(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r})\mathbf{s}^\alpha + \mathbf{V}(\mathbf{r}), \quad (7.2)$$

которая отличается от фазовой скорости $c_f(\mathbf{r})$, задаваемой уравнением (7.1), как по величине, так и по направлению, что влечет за собой искривление лучевых траекторий. Если этот эффект оказывается существенным, необходимо использовать уравнение эйконала для описания геометрии лучевых трубок.

Пусть $T_0 = 2l_0/c_0$ - время пролета акустического импульса, излученного элементом передающей антенны и зарегистрированного элементом приемной антенны в невозмущенной однородной среде. Тогда в предположении, что уравнение (7.1) справедливо, отклонение времени пролета от фиксированного уровня T_0 в первом приближении по отношению к числу Маха $|\mathbf{V}|/c_0$ может быть записано для каждой i -й пары излучатель - приемник в виде

$$\tau(\zeta_i, \mathbf{s}^\alpha) = -\frac{1}{c_0^2} \int_{r_i^R}^{r_i^T} (\xi(\mathbf{r}) + \mathbf{V}(\mathbf{r})\mathbf{s}^\alpha) \delta(\mathbf{r}\mathbf{s}_\perp^\alpha - \zeta_i) d\mathbf{r}, \quad (7.3)$$

где $r_i^T = -l_0 \mathbf{s}^\alpha + \zeta_i \mathbf{s}_\perp^\alpha$, $r_i^R = l_0 \mathbf{s}^\alpha + \zeta_i \mathbf{s}_\perp^\alpha$ - координаты i -го передатчика и приемника соответственно и единичный вектор \mathbf{s}_\perp^α ортогонален \mathbf{s}^α .

Из уравнения (7.3) следует, что последовательная реализация измерений $\tau(\zeta_i, \mathbf{s}^\alpha)$ для всех пар излучатель - приемник при некотором фиксированном направлении \mathbf{s}^α формирует набор линейных интегралов функции $\xi(\mathbf{r}) + \mathbf{V}(\mathbf{r})$, т.е. проекцию $\tau(\zeta_i, \mathbf{s}^\alpha)$ этой функции на направление \mathbf{s}_\perp^α .

В рамках модели вихревого потока несжимаемой жидкости

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}), \quad (7.4)$$

(где $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ - вектор вихря или просто вихрь) пространственный спектр поля скоростей потока однозначно определен спектральными амплитудами вектора вихря $\tilde{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{k})$:

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}) = j[\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{k})]/k^2. \quad (7.5)$$

С учетом уравнения (7.5) фурье-образ проекции

$$\tilde{\tau}(\beta, \mathbf{s}^\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\zeta, \mathbf{s}^\alpha) e^{-j\beta\zeta} d\zeta \quad (7.6)$$

может быть представлен следующим образом:

$$\tilde{\tau}(\beta, \mathbf{s}^\alpha) = -\frac{1}{c_0^2} \left(\tilde{\xi}(\beta \mathbf{s}_\perp^\alpha) + \frac{j\tilde{\Omega}_z(\beta \mathbf{s}_\perp^\alpha)}{\beta} \right), \quad (7.7)$$

где β - координата пространственного спектра вдоль линии L_r , а обозначение $[\tilde{\cdot}]$ соответствует операции фурье-преобразования.

Уравнение (7.7) - аналог скалярной проекционной фурье-теоремы применительно к вихревому движению неоднородной среды. Соотношение связывает линейный образ Фурье проекции $\tilde{\tau}(\beta, \mathbf{s}^\alpha)$ со значениями пространственного спектра $\tilde{\xi}(\mathbf{k})$ функции $\xi(\mathbf{r})$, характеризующей возмущения фазовой скорости звука, и значениями спектра вектора вихря $\tilde{\Omega}_z(\mathbf{k})$, определяющего характеристики потока, восстанавливаемого вдоль радиальной линии $\beta \mathbf{s}^\alpha$ в пространстве волновых векторов.

Повторение томографических измерений для достаточного числа направлений сканирования в диапазоне углов $\alpha \in [0, \pi]$ приводит к заполнению соответствующей круговой области в пространстве волновых векторов, формируя, таким образом, совместную низкочастотную оценку скалярной части неоднородности и пространственного спектра вектора вихря $\tilde{\Omega}_z(\mathbf{k})$. После разделения неподвижной и «движущейся» составляющих компонент значения $\tilde{V}_z(\mathbf{k})$ и $\tilde{V}_y(\mathbf{k})$ находятся с помощью формулы (7.5).

7.3. Раздельное отображение скалярной и «движущейся» компонент

Чтобы разделить скалярную и «движущуюся» (вихревую) компоненты, будем использовать метод двунаправленных томографических измерений, суть которого схематически представлена на рис. 7.1. Действительно, выражение для измерительных данных, полученных в направлении, противоположном \mathbf{s}^α , имеет вид

$$\tilde{r}(-\beta, \mathbf{s}^{\alpha+\pi}) = -\frac{1}{c_0^2} \left(\tilde{\xi}(-\beta \mathbf{s}_\perp^{\alpha+\pi}) - \frac{j\tilde{\Omega}_z(-\beta \mathbf{s}_\perp^{\alpha+\pi})}{\beta} \right). \quad (7.8)$$

Тогда, суммируя (7.7) и (7.8), получаем

$$\tilde{\xi}(\beta \mathbf{s}_\perp^\alpha) = -\frac{c_0^2}{2} \tilde{S}(\beta | \mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}^{\alpha+\pi}), \quad (7.9)$$

где

$$\tilde{S}(\beta | \mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}^{\alpha+\pi}) = \tilde{r}(\beta, \mathbf{s}^\alpha) + \tilde{r}(-\beta, \mathbf{s}^{\alpha+\pi}).$$

Соответственно из разности $\tilde{r}(\beta, \mathbf{s}^\alpha)$ и $\tilde{r}(-\beta, \mathbf{s}^{\alpha+\pi})$

$$\tilde{D}(\beta | \mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}^{\alpha+\pi}) = \tilde{r}(\beta, \mathbf{s}^\alpha) - \tilde{r}(-\beta, \mathbf{s}^{\alpha+\pi})$$

получаем выражение для пространственного спектра вектора вихря

$$\tilde{\Omega}_z(\beta \mathbf{s}_\perp^\alpha) = \frac{j\beta c_0^2}{2} \tilde{D}(\beta | \mathbf{s}^\alpha, \mathbf{s}^{\alpha+\pi}), \quad (7.10)$$

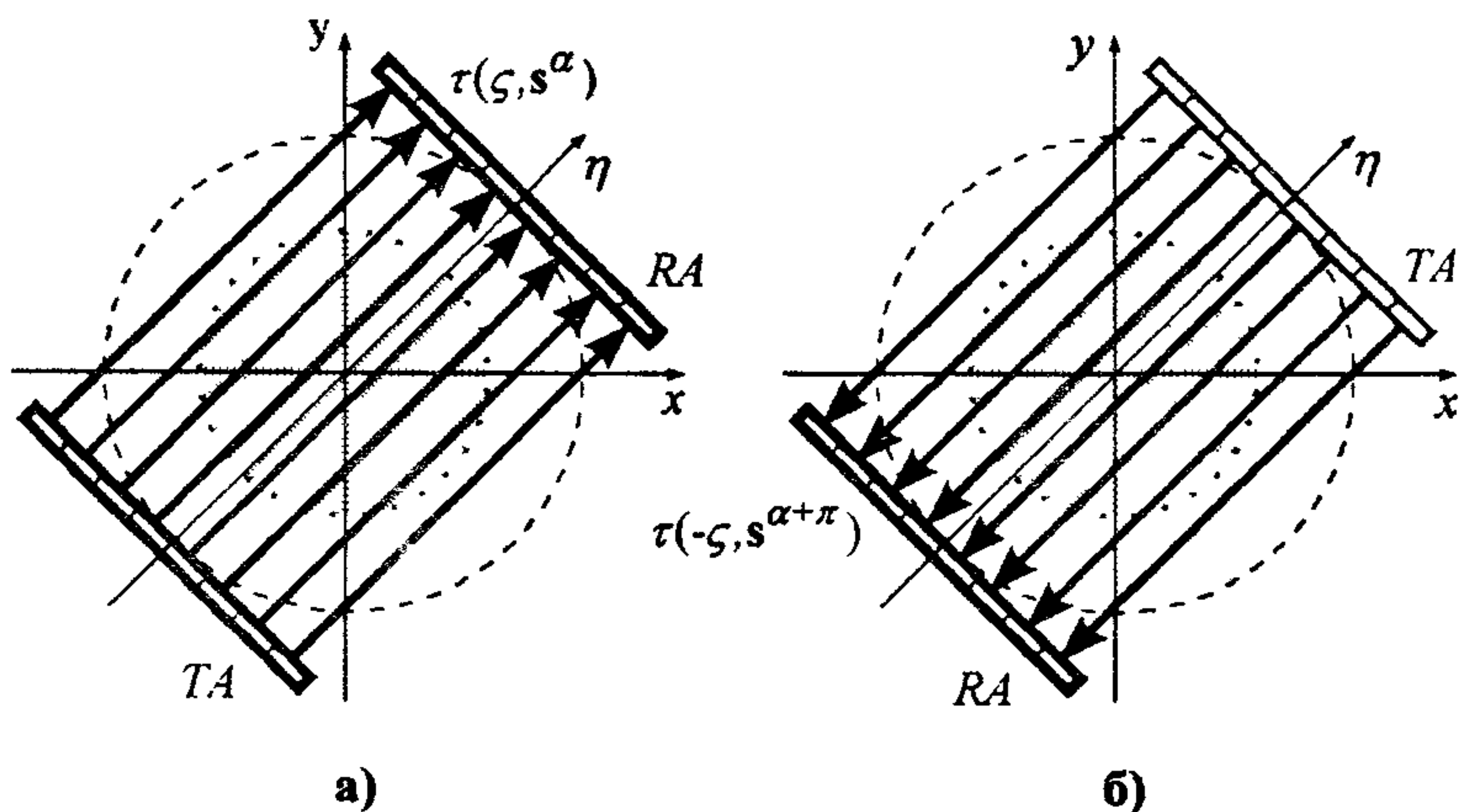


Рис. 7.1 Метод двунаправленных измерений применительно к условиям просветного томографического эксперимента. Для произвольного фиксированного направления s^α производится сбор двух наборов времяпролетных данных: а - прямой $\tau(\zeta, s^\alpha)$ и б - обратной $\tau(\zeta, s^{\alpha+\pi})$ проекций

Повторение измерений с достаточного числа направлений $\alpha \in [0, 2\pi[$ обеспечивает как реконструкцию рефракционной части неоднородности на основе (7.6), так и восстановление вектора вихря с помощью (7.10), используя алгоритмы лучевой трансмиссионной томографии, например, интерполяционного типа.

7.4. Реконструкция векторного поля интерполяцией в пространстве Фурье

Численное моделирование задачи производится в два этапа. На первом этапе осуществляется генерация измерительных проекционных данных $\tau(\zeta, s^\alpha)$. На втором этапе производится собственно реконструкция векторного поля.

На практике значения $\tau(\zeta, s^\alpha)$ могут быть определены лишь

для некоторого набора направлений сканирования и ограниченного числа измерительных элементов сканирующей апертуры. Для реальных вычислений нужен, таким образом, алгоритм, реализующий вычисления (7.9), (7.10) на совокупности дискретных данных.

Компоненты пространственного спектра вектора вихря $\hat{\Omega}(\mathbf{k})$ должны быть определены в общем случае в узлах равномерной сетки $N \times N \times N$ с шагом дискретизации $\Delta k = \pi/R_0$, что дает возможность производить обработку и преобразование фурье-образа с помощью БПФ.

Ограничимся рассмотрением двумерного варианта задачи, что позволяет характеризовать компоненты $\tilde{V}_x(\mathbf{k})$ и $\tilde{V}_y(\mathbf{k})$ с помощью единственной z -компоненты вектора вихря Ω_z , которая, в свою очередь, является скалярной двумерной функцией. Такая формулировка задачи идентична стандартной проекционной схеме компьютерной томографии и скалярная функция Ω_z может быть восстановлена по дискретной выборке ее значений с помощью подходящей интерполяционной процедуры в фурье-пространстве.

Здесь приведем лишь оценку объема вычислений интерполяционного фурье-алгоритма без учета затрат, связанных с выполнением собственно интерполяционных операций. Для выполнения I дискретных преобразований Фурье длины $2J$ с целью определения фурье-образа проекций требуется $O(IJ \log J)$ операций. Для выполнения двумерного обратного дискретного преобразования Фурье с целью получения оценки $\Omega_z = \mathcal{F}^{-1}\tilde{\Omega}_z(\mathbf{k})$ требуется $O(J^2 \log J)$ операций. Если значения I и J выбраны таким образом, что удовлетворено соотношение $I = \pi J$, связывающее оптимальным образом число направлений сканирования I и число отсчетов по каждому направлению $2J + 1$ для параллельной схемы сканирования, то общее число операций составляет $O(J^2 \log J)$. Эта оценка намного меньше оценки $O(J^3)$, характеризующей число операций, необходимых для реализации алгоритма свертки и обратного проецирования.

Для проведения численного эксперимента воспользуемся двумя гидродинамическими моделями движущейся среды, описывающими

вращательное движение жидкости при малых числах Рейнольдса.

В первой модели z -компонента вектора вихря определяется соотношением

$$\Omega_z(r) = 2\Omega_0 \exp(-r^2/\rho_0^2), \quad (7.11)$$

которое характеризует так называемый вихрь Осена с «ядром» ρ_0 и является точным решением уравнения Навье - Стокса. Соответствующее выражение для азимутальной скорости имеет вид

$$W(r) = \Omega_0 \rho_0^2 [1 - \exp(-r^2/\rho_0^2)]/r.$$

Для определения пространственного спектра z -компоненты вектора вихря воспользуемся преобразованием Фурье - Бесселя:

$$\tilde{\Omega}_z(k) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Omega_z(r) e^{jkr \cos \psi} r d\psi dr = 2\pi \int_0^\infty r J_0(kr) \Omega_z(r) dr. \quad (7.12)$$

Учтем, что

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad (7.13)$$

где $\text{Re } \alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\text{Re } \nu > -1$ [7]. Сравнив (7.12) и (7.13), получим следующие значения ν , α и β в (7.13): $\nu = 0$, $\alpha = 1/\rho_0^2$ и $\beta = k$. Следовательно,

$$\tilde{\Omega}_z(k) = 2\pi \Omega_0 \rho_0^2 \exp\left\{-\frac{k^2 \rho_0^2}{4}\right\}. \quad (7.14)$$

Имея аналитическое выражение (7.14) и учитывая, что проекции вектора скорости задаются в декартовой системе координат выражениями $V_x = -W \sin \psi$ и $V_y = W \cos \psi$, нетрудно получить выражения для соответствующих пространственных спектров \tilde{V}_x и \tilde{V}_y :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_x(k_x, k_y) &= j\tilde{\Omega}_z(k_x, k_y) k_y/k^2, \\ \tilde{V}_y(k_x, k_y) &= -j\tilde{\Omega}_z(k_x, k_y) k_x/k^2. \end{aligned} \quad (7.15)$$

На рис. 7.2 и 7.3 приведены зависимости проекционных время-пролетных данных для вихревого потока вида (7.11) и соответствующие им исходные и реконструированные профили азимутальной скорости, полученные в процессе численного моделирования. В качестве дополнительной иллюстрации развитого метода на рис. 7.4 представлено полутонное изображение восстановленного векторного поля.

Вторая модель соответствует стационарному ламинарному движению жидкости, заключенной между двумя цилиндрами, вращающимися с различными скоростями. Выражение для азимутальной скорости потока для этого случая также хорошо известно (см., например, [14]). В частности, если вращается только внутренний цилиндр, а внешний цилиндр покоится, то уравнение Навье - Стокса для данной геометрии задачи имеет точное решение

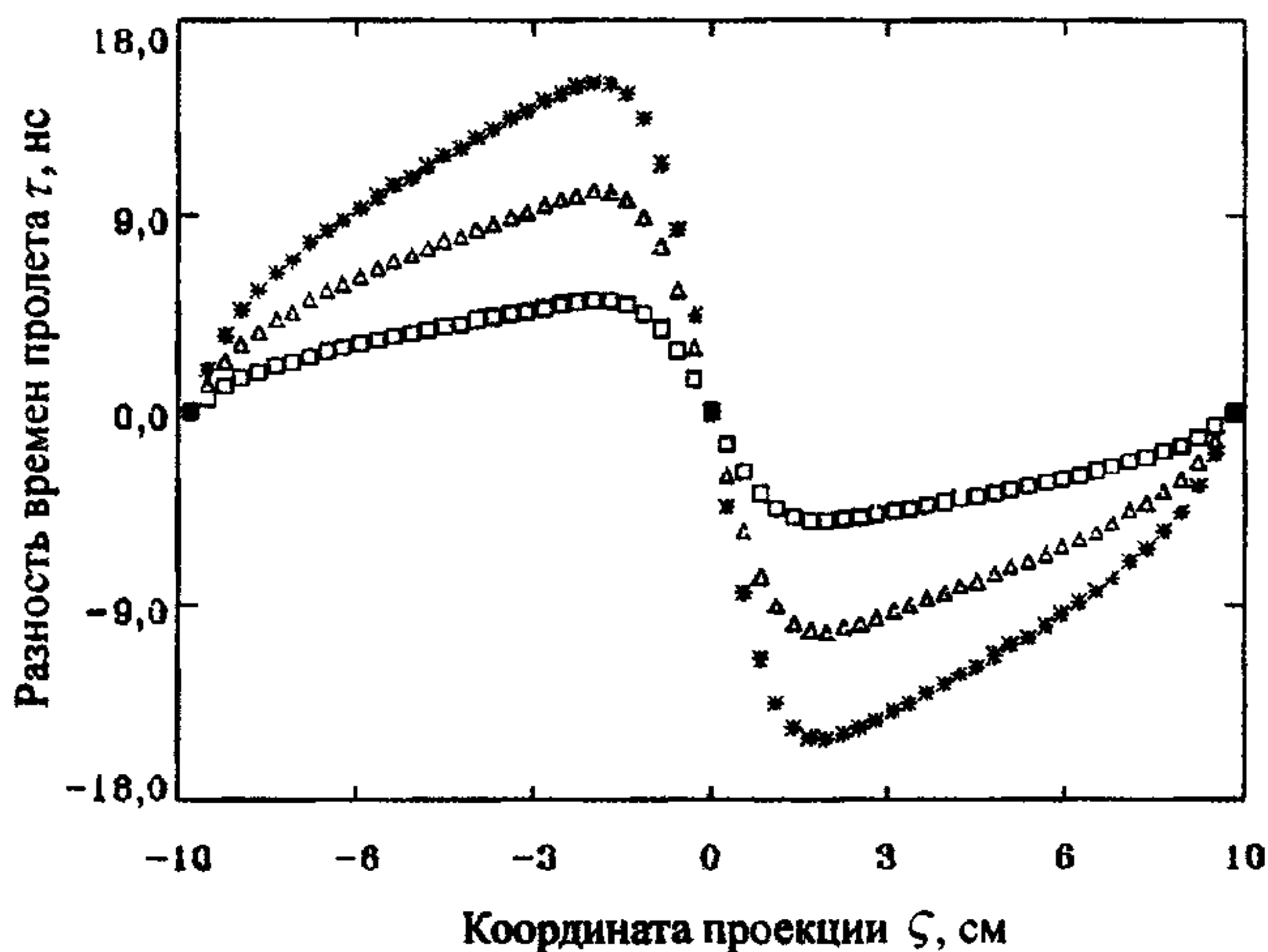


Рис. 7.2. Результаты численного моделирования проекционных данных $D(\zeta | s^\alpha, s^{\alpha+\pi})$ для вихревого потока вида (7.11) с ядром $\rho_0 = 1,5$ см при различных значениях Ω_0 . Условные обозначения \square - $\Omega_0 = 12,56 \text{ с}^{-1}$; Δ - $\Omega_0 = 25,12 \text{ с}^{-1}$; $*$ - $\Omega_0 = 37,68 \text{ с}^{-1}$

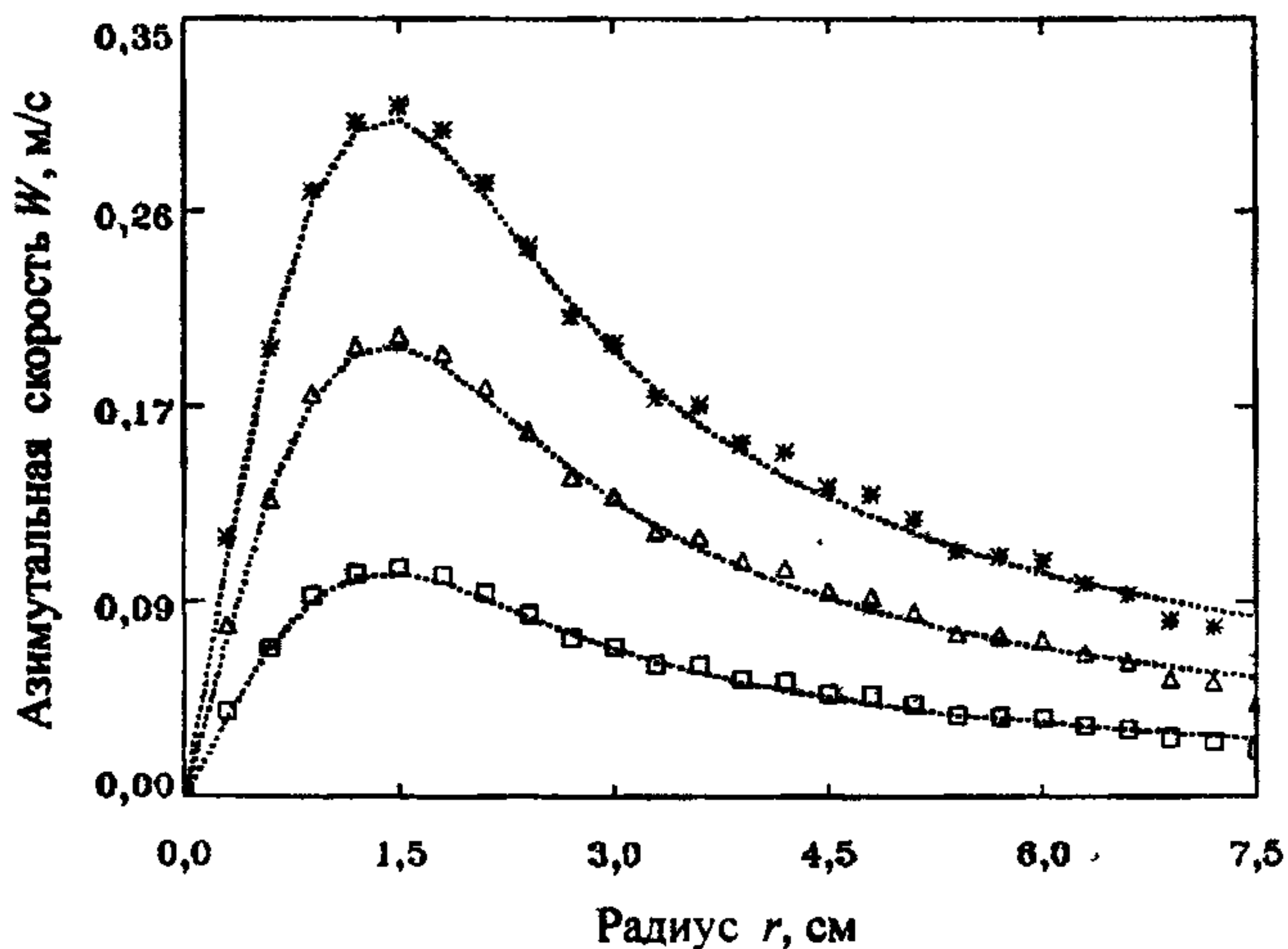


Рис. 7.3. Результаты томографической реконструкции профиля угловой скорости вихревого потока вида (7.11) по данным параллельного сканирования. Исходные данные представлены на рис. 7.2

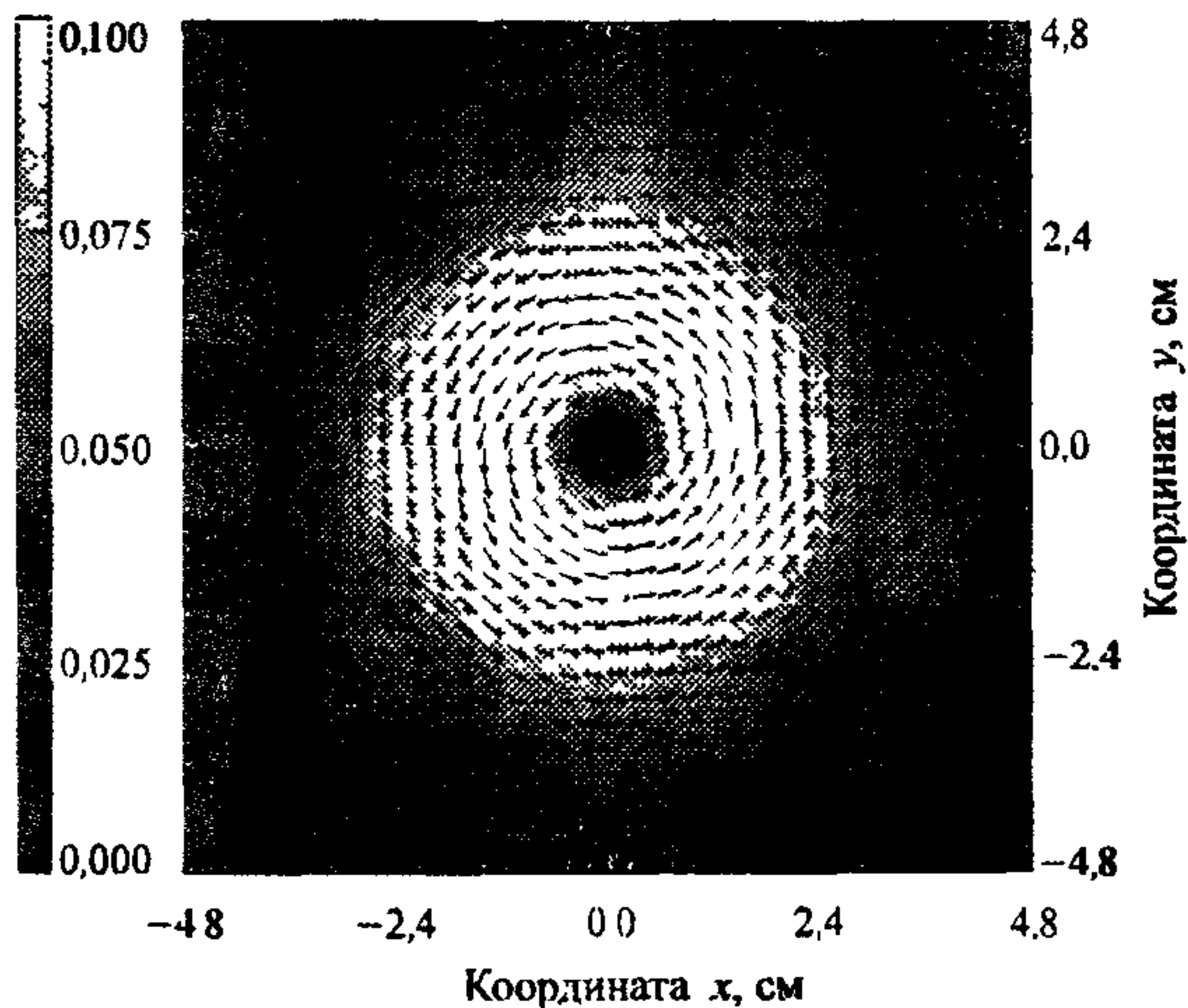


Рис. 7.4. Полутоновое изображение векторного поля, соответствующего профилю \square на рис. 7.2 и 7.3

в цилиндрической системе координат

$$W(r) = \frac{\Omega_0 r}{\gamma^2 - 1} \left\{ \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 - 1 \right\}, \quad (7.16)$$

где $\gamma = R_2/R_1$, а R_1 и R_2 характеризуют радиусы внутреннего и внешнего цилиндров. Выполняя последовательно вычисления (7.12) - (7.14), можно получить оценки, аналогичные (7.15), и для рассматриваемой гидродинамической модели.

На рис. 7.5 и 7.6 представлены проекционные времяпролетные данные и соответствующие им исходные и реконструированные профили азимутальной скорости, полученные в процессе численного моделирования.

В обоих случаях реконструкция осуществлялась с помощью интерполяционного алгоритма по $I_\alpha = 90$ проекциям. В каждой

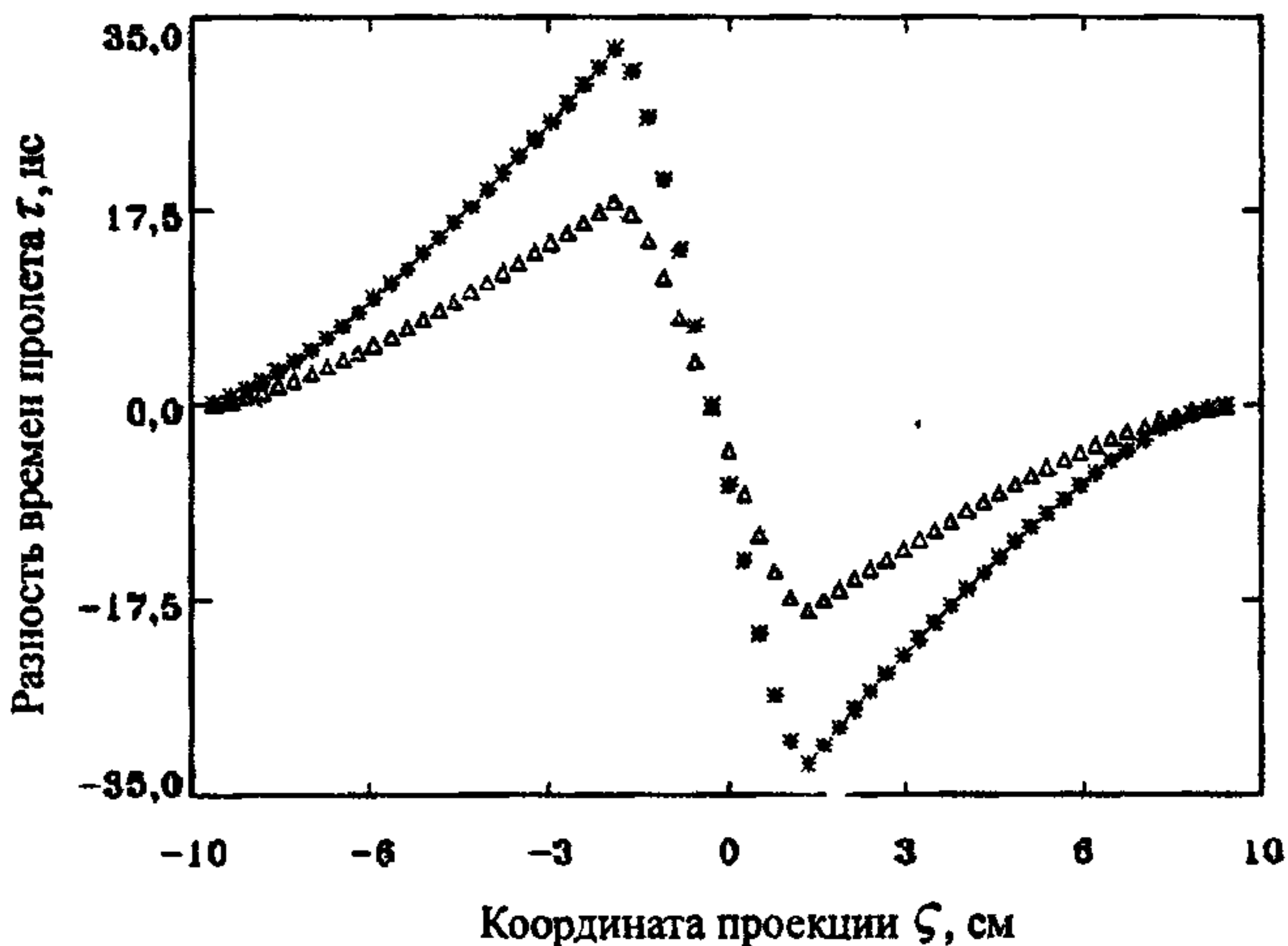


Рис. 7.5. Результаты численного моделирования проекционных данных $D(\zeta|s^\alpha, s^{\alpha+\pi})$ для вихревого потока вида (7.16) при различных значениях Ω_0 . Условные обозначения: Δ - $\Omega_0 = 25,12 \text{ с}^{-1}$; * - $\Omega_0 = 43,95 \text{ с}^{-1}$

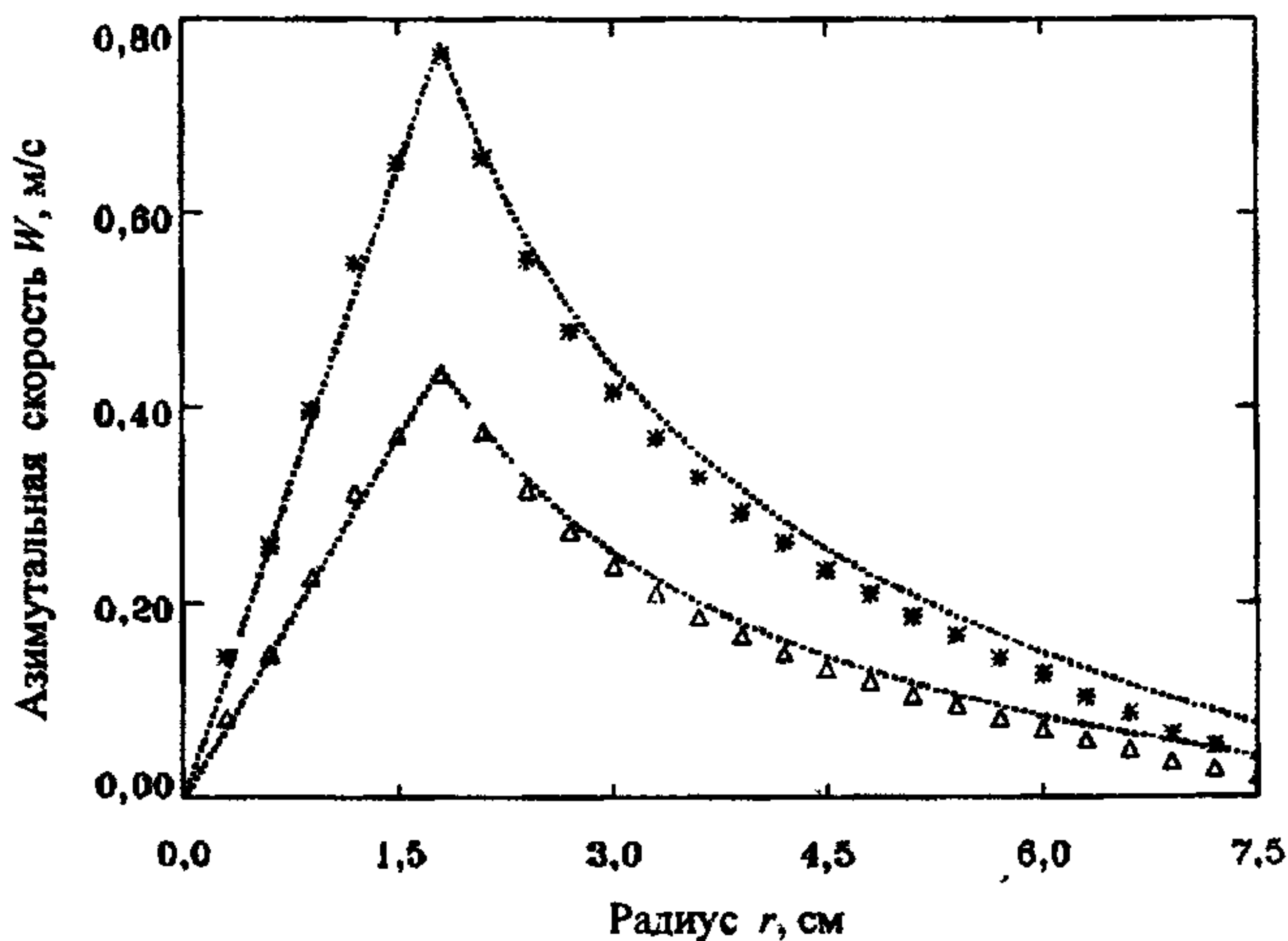


Рис. 7.6. Результаты томографической реконструкции профиля угловой скорости вихревого потока вида (7.16) по данным параллельного сканирования. Исходные проекционные данные представлены на рис. 7.5

из проекций данные регистрировались $J_\beta = 64$ преобразователями. Оценка пространственного спектра вектора вихря произведена с помощью интерполяции «по ближайшему соседу». Итоговое изображение содержит 64×64 элиза.

8. Дифракционная акустическая томография движущейся среды

8.1. Дифференциальные уравнения акустики неоднородной движущейся среды

В координатной системе S' , движущейся вместе с потоком, звуковое поле описывается стандартными механическими законами сохранения массы и количества движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x'_i} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t'} &= -\frac{\partial p}{\partial x'_i}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где u_i характеризует скорость частиц в среде; ρ - малое возмущение плотности от некоторого равновесного уровня ρ_0 ; индекс i соответствует координатам x и y (здесь и далее рассматривается задача в двумерной постановке). Если вектор скорости потока $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ имеет компоненты V_i , то уравнения, описывающие преобразование системы координат (от движущейся S' к неподвижной относительно невозмущенной среды S), имеют вид

$$r_i = r'_i + V_i t', \quad t = t'.$$

Тогда для любой функции $f(\mathbf{r})$, являющейся функцией пространственных координат и времени, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (8.2)$$

Как следует из (8.2), производные по пространственным координатам являются инвариантными относительно упомянутого выше преобразования. Для частной производной по времени имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i V_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (8.3)$$

или, применяя дифференциальный оператор, в векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla. \quad (8.4)$$

Производя подстановку (8.2) и (8.4) в (8.1), получаем систему уравнений, описывающих динамику жидкости в лабораторной системе координат S :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)\rho + \rho_0 \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)u_i &= -\frac{\partial p}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Используя два последних уравнения и уравнение состояния, представимое в виде $dp = c^2 d\rho$, имеем следующую форму волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2 \sum_i V_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum V_i V_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = c^2 \nabla^2 p, \quad (8.6)$$

или

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)^2 p = \nabla^2 p. \quad (8.7)$$

Следуя стандартной практике, осуществляем переход от пространственно-временной формы волнового уравнения к уравнению Гельмгольца для спектральных амплитуд, производя замену всех зависящих от времени функций их соответствующими фурье-образами. Тогда в случае гармонической временной зависимости звукового поля $\exp\{-j\omega t\}$ волновое уравнение (8.7) для спектральных амплитуд звукового давления $p(\mathbf{r}, \omega) = U_\omega(\mathbf{r}, t)\exp\{j\omega t\}$ имеет вид

$$\nabla^2 U_\omega + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 + \frac{j}{\omega} \mathbf{V} \cdot \nabla\right)^2 U_\omega = 0. \quad (8.8)$$

В рамках гидродинамической модели идеальной жидкости скорость звуковой волны выражается формулой

$$c = c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})}}, \quad (8.9)$$

где $\kappa(\mathbf{r})$ - комплексный коэффициент сжимаемости и $\rho(\mathbf{r})$ - локальная плотность в точке \mathbf{r} . Пренебрегая в (8.8) членами второго порядка малости относительно $|\mathbf{V}|/c$, будем иметь:

$$\Delta U_\omega(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c(\mathbf{r})}\right)^2 U_\omega(\mathbf{r}) + \frac{2j}{\omega} \left(\frac{\omega}{c(\mathbf{r})}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}) \nabla U_\omega(\mathbf{r}) = 0. \quad (8.10)$$

Пусть c_0 обозначает либо скорость звука в невозмущенном пространстве, либо среднее значение скорости в зависимости от того, каким образом будет в дальнейшем формулироваться алгоритм реконструкции. В новых обозначениях уравнение (8.10) принимает вид

$$\Delta U_\omega(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 U_\omega(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})U_\omega(\mathbf{r}) - \frac{2j}{\omega} \left(\frac{\omega}{c_0}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}) \nabla U_\omega(\mathbf{r}), \quad (8.11)$$

в котором функция

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 (1 - n^2(\mathbf{r}))$$

описывает скалярную неоднородность скорости звука; $n(\mathbf{r})$ - коэффициент преломления.

Перепишем по аналогии с (5.1) уравнение (8.11) в терминах волновых векторов $k_0 = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda$, где λ - длина волны. Пренебрегая членами второго порядка малости относительно числа Маха M будем иметь линеаризованный вариант (8.8) в форме

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k_0^2 U(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})U(\mathbf{r}) - \frac{2j}{c_0} k_0 \mathbf{V}(\mathbf{r}) \nabla U(\mathbf{r}), \quad (8.12)$$

в котором индекс ω у $U_\omega(\mathbf{r})$ опущен.

Для неоднородной среды в отсутствие потоков и вихрей, т.е. $\mathbf{V}(\mathbf{r}) \equiv 0$ для $\forall \mathbf{r}$, выражение (8.12) имеет вид

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k_0^2 U(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})U(\mathbf{r}). \quad (8.13)$$

Произведение $\epsilon(\mathbf{r})U(\mathbf{r})$ в правой части (8.13) обозначает источники вторичного излучения (см. § 5.3). Следует, однако, подчеркнуть, что представление вторичных источников в таком виде является справедливым лишь в том случае, когда могут быть проигнорированы первые производные, а также производные высших порядков относительно параметров среды. Если же данное условие не выполняется, следует использовать точную форму волнового уравнения:

$$(\Delta + k_0^2)U(\mathbf{r}) = k_0^2 \gamma_\kappa - \nabla \cdot (\gamma_\rho \nabla U(\mathbf{r})), \quad (8.14)$$

где

$$\gamma_\kappa = \frac{\kappa - \kappa_0}{\kappa_0}, \quad \gamma_\rho = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}.$$

8.2. Дифракционная томографическая фурье-теорема для вихревых потоков

Геометрия томографического эксперимента, основанного на регистрации данных рассеяния звуковой волны движущейся неоднородной жидкой средой, аналогична той, которая использовалась для решения задачи скалярной дифракционной томографии (см. рис. 5.1). Будем вновь предполагать, что и функция скалярной неоднородности $\xi(\mathbf{r})$, и вариации вектора скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ локализованы в пространстве R и ограничены в области \mathcal{R} , которая полностью покрывается кругом радиуса R_0 . Пусть также исследуемая область лоцируется плоскими волнами

$$U_0(\mathbf{r}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = U_0 \exp(jk_0 \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{r}) \quad (8.15)$$

с различных направлений, задаваемых множеством волновых векторов $\{\mathbf{k}_0^\alpha : \mathbf{k}_0^\alpha = k_0 \mathbf{s}_0^\alpha\}$, где $\mathbf{s}_0^\alpha = s_0(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ - единичный вектор, ортогональный к фронту волны; U_0 - амплитуда плоской

волны; k_0 - волновое число, а рассеянное поле $u(\zeta)$ регистрируется линейной матрицей приемников RA с конечной апертурой D_A , расположенной на расстоянии l_0 от центра системы координат.

В первом приближении относительно числа Маха $|\mathbf{V}|/c_0$ и в предположении, что поток является квазиустановившимся - типичное время изменения $T \gg \omega^{-1}$ (ω - угловая частота звуковой волны) - волновое уравнение, записанное для гармонического по времени акустического давления $U(\mathbf{r}, \omega) = p(\mathbf{r}, t)\exp\{j\omega t\}$, сводится к скалярному уравнению Гельмгольца вида (8.12).

Данное уравнение не может быть решено относительно $u(\mathbf{r})$ непосредственно, но решение может быть представлено в терминах функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которая является решением дифференциального уравнения

$$(\Delta + k_0^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (8.16)$$

В двумерном варианте задачи решением уравнения (8.16) является функция Ганкеля нулевого порядка первого рода

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4}H_0^1(k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (8.17)$$

Будем предполагать, что для любого вектора $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathcal{R} \subset D_{R_0}$ удовлетворено условие

$$\left\| \frac{u(\mathbf{r})}{U_0(\mathbf{r})} \right\| \ll 1, \quad (8.18)$$

соответствующее слабости рассеянного поля $u(\mathbf{r})$ по сравнению с падающим полем $U_0(\mathbf{r})$ в каждой точке \mathcal{R} (см. также § 6.1). Вообще говоря, если $|\mathbf{V}| < c_0$, рассеяние звука потоком будет чрезвычайно слабым, поскольку амплитуда рассеяния пропорциональна числу Маха.

Принимая во внимание сформулированные выше требования, рассеянное поле $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ (\mathcal{Z} - зона приема, $\mathcal{Z} \cap \mathcal{R} = \emptyset$) можно представить в первом (борновском) приближении в виде

$$U(\mathbf{z}) = \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{z}, \mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r})U_0(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{2k_0^2}{c_0} \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{z}, \mathbf{r}) (\mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{V}(\mathbf{r})) U_0(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (8.19)$$

Как и следовало ожидать, после линеаризации рассеянное поле на Z представляет собой суперпозицию двух компонент: поле

$$U_s(\mathbf{z}) = \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{z}, \mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r}) U_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

рассеянное на скалярном потенциале, и поле

$$U_v(\mathbf{z}) = -\frac{2k_0^2}{c_0} \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{z}, \mathbf{r}) (\mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{V}(\mathbf{r})) U_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

рассеянное на потоке, подлежащем восстановлению. По очевидной причине итоговый вид формулы фурье-обращения для движущейся среды со стационарными неоднородностями будет также представлять собой суперпозицию скалярной и движущейся компонент.

Процедуры реконструкции скалярных неоднородностей исследовались ранее в гл. 5. Поэтому исключительно из соображений краткости будем анализировать здесь случай стационарного однородного потока, т.е. $\xi(\mathbf{r}) \equiv 0$ для $\forall \mathbf{r}$. Рассмотрение общей модели неоднородной движущейся среды будет произведено ниже в связи с решением задачи разделения отдельных компонент рассеяния.

Введем единичный вектор $\mathbf{s}_\perp^{\alpha+\vartheta} = (-\sin(\alpha + \vartheta), \cos(\alpha + \vartheta))$, ортогональный вектору $\mathbf{s}^{\alpha+\vartheta}$. Тогда в системе координат (ζ, η) , повернутой относительно системы (x, y) на угол $\alpha + \vartheta - \pi/2$ (см. рис. 5.1), вектор $\mathbf{z} - \mathbf{r} = l_0 \mathbf{s}^{\alpha+\vartheta} - \zeta \mathbf{s}_\perp^{\alpha+\vartheta} - \mathbf{r}$ имеет координаты $(\zeta - x \sin(\alpha + \vartheta) + y \cos(\alpha + \vartheta), l_0 - x \cos(\alpha + \vartheta) - y \sin(\alpha + \vartheta))$.

Используя разложение функции Ганкеля по плоским волнам

$$H_0(k_0|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma} \exp\{j[\beta(\zeta - x \sin(\alpha + \vartheta) + y \cos(\alpha + \vartheta) + (8.20) \\ + \gamma|l_0 - x \cos(\alpha + \vartheta) - y \sin(\alpha + \vartheta)|)]\} d\beta$$

(где β - линейная координата пространственного спектра проекции вдоль линии L_r), имеем следующее выражение для поля, рассеянного вперед, т.е. регистрируемого приемниками:

$$u_{l_0}(\zeta, \mathbf{s}_0^\alpha) = -\frac{jU_0 k_0^2}{2\pi c_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{\gamma} (\mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{V}(\mathbf{r})) \exp\{j\beta\zeta\} \exp\{jk_0 \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{r}\} \times \quad (8.21)$$

$$\times \exp\{j\gamma(l_0 - \mathbf{s}^{\alpha+\vartheta} \mathbf{r})\} \exp\{j\beta \mathbf{s}_\perp^{\alpha+\vartheta} \mathbf{r}\} d\mathbf{r} d\beta,$$

где $\gamma > 0$, если $|\beta| < k_0$, и $Im\gamma > 0$, если $|\beta| < k_0$, что физически соответствует исключению из рассмотрения неоднородных волн, убывающих в дальней зоне.

Применяя преобразование Фурье к обеим частям (8.21) и распространяя интегрирование на все пространство R^2 , будем иметь

$$\tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) = -\frac{jU_0 k_0^2}{c_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma} (\mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{V}(\mathbf{r})) \exp\{j\gamma l_0\} \times \quad (8.22)$$

$$\times \exp\{-j[\beta \sin(\alpha + \vartheta) + \gamma \cos(\alpha + \vartheta) - k_0 \cos(\alpha)]x\} \times$$

$$\times \exp\{-j[\gamma \sin(\alpha + \vartheta) - \beta \cos(\alpha + \vartheta) - k_0 \sin(\alpha)]y\} dx dy,$$

в котором тильда обозначает соответствующий фурье-образ.

Будем, как и прежде, рассматривать модель несжимаемого вихревого потока, т.е. соотношения (7.4) справедливы. Тогда в предположении, что соответствующая z -компонента вектора вихря $\Omega_z(\mathbf{r})$ есть произвольная функция \mathbf{r} , убывающая достаточно быстро для того, чтобы ее спектр $\tilde{\Omega}_z(\mathbf{k})$ был ограниченным в области пространственных частот, и с учетом того обстоятельства, что интегрирование в (8.22) соответствует двумерному образу Фурье функции $V_x(\mathbf{r}) \cos(\alpha) + V_y(\mathbf{r}) \sin(\alpha)$, томографическая дифракционная теорема для вектора вихря имеет вид

$$\tilde{\Omega}_z \left((\gamma - k_0 \cos \vartheta) \mathbf{s}^{\alpha+\vartheta} - (\beta - k_0 \sin \vartheta) \mathbf{s}_\perp^{\alpha+\vartheta} \right) = \quad (8.23)$$

$$= \frac{2c_0 \gamma (k_0 - \beta \sin \vartheta - \gamma \cos \vartheta)}{U_0 k_0 (\gamma \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta)} e^{-j\gamma l_0} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha).$$

Таким образом, подобно скалярному случаю (соотношения (5.20) и (5.22) в § 5.1) уравнение (8.23) связывает образ Фурье измеренных просветных данных рассеяния с пространственным спек-

тром вектора вихря и определяет его значения вдоль полуокружности в области пространственных частот. Многократное повторение томографического эксперимента для набора направлений в диапазоне углов $0 - 2\pi$ вновь приводит к заполнению круга радиуса $\sqrt{2}k_0$ в K -пространстве. Фурье-компоненты $\tilde{V}_x(\mathbf{k})$ и $\tilde{V}_y(\mathbf{k})$ определяются в соответствии с выражением (7.15), а итоговая реконструкция вектора скорости производится с помощью обратного преобразования Фурье.

Пусть направление радиус-вектора $\mathbf{s}^{\alpha+\vartheta}$ является фиксированным и совпадает с направлением оси y , т.е. линия L_r перпендикулярна оси y . Если угол α изменяется в интервале $[0, \pi]$, то для определения значений пространственных компонент $\tilde{\Omega}_z(\mathbf{k})$ следует использовать выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_z(\beta - k_0 \cos \alpha, \gamma - k_0 \sin \alpha) = \\ = \frac{2\gamma c_0(k_0 - \beta \cos \alpha - \gamma \sin \alpha)}{U_0 k_0(\gamma \cos \alpha - \beta \sin \alpha)} e^{-j\gamma l_0} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha), \end{aligned} \quad (8.24)$$

имея в виду то обстоятельство, что для данной измерительной схемы справедливо соотношение $\alpha + \vartheta = \pi/2$.

Если направления векторов \mathbf{s}_0^α и $\mathbf{s}^{\alpha+\vartheta}$ совпадают для любого α ($\vartheta = 0$), а начала систем координат (x, y) и (ζ, η) совмещены с центром поворота приемно-излучающей системы, то выражение (8.23) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_z((\gamma - k_0) \cos \alpha + \beta \sin \alpha, (\gamma - k_0) \sin \alpha - \beta \cos \alpha) = \\ = \frac{2\gamma c_0(\gamma - k_0)}{U_0 k_0 \beta} e^{-j\gamma l_0} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Полученные уравнения (8.24) и (8.25) являются общими и формируют основу фурье-алгоритмов дифракционной томографии однородных вихревых потоков. Уравнение (8.24) используется в том случае, когда положение приемной апертуры фиксировано и реконструируемая область облучается с различных направлений $\{\mathbf{s}_0^\alpha\}$.

Что касается уравнения (8.25), то оно должно использоваться в таких экспериментах, где приемная и передающая апертуры перпендикулярны к направлению распространения лоцирующего сигнала (направления векторов \mathbf{s}_0^α и $\mathbf{s}_0^{\alpha+\vartheta}$ совпадают) и вращаются вокруг объекта одновременно.

8.3. Разделение скалярной и векторной компонент

Будем рассматривать общий случай движущейся среды со стационарными рефракционными неоднородностями, т.е. компоненты $V_x(x, y)$ и $V_y(x, y)$ являются независимыми и не связанными непосредственно соотношениями (7.4). Модель скалярной неоднородности и геометрия эксперимента остаются теми же.

Производя вычисления, аналогичные (8.20) - (8.22), из уравнения (8.19) получаем

$$\tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) = \frac{jU_0}{2\gamma} e^{j\gamma l_0} \left\{ \tilde{\epsilon}(\mathbf{K}) - \frac{2k_0^2}{c_0} [\tilde{V}_x(\mathbf{K}) \cos \alpha + \tilde{V}_y(\mathbf{K}) \sin \alpha] \right\}, \quad (8.26)$$

где вектор $\mathbf{K} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ имеет координаты $((\beta \sin(\alpha + \vartheta) + \gamma \cos(\alpha + \vartheta) - k_0 \cos(\alpha), \gamma \sin(\alpha + \vartheta) - \beta \cos(\alpha + \vartheta) - k_0 \sin(\alpha))$. Коэффициент

$$\frac{jU_0}{2\gamma} e^{j\gamma l_0}$$

является постоянной величиной для фиксированной линии приема. По аналогии со скалярной обратной задачей более удобно переформулировать уравнение (8.26), применяя фильтрованные данные:

$$\tilde{w}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) = -\frac{j2\gamma}{U_0} e^{-j\gamma l_0} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha), \quad (8.27)$$

а именно,

$$\tilde{w}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{K}) - 2k_0^2 \{ \tilde{W}_x(\mathbf{K}) \cos \alpha + \tilde{W}_y(\mathbf{K}) \sin \alpha \}, \quad (8.28)$$

где $\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{K})$ - пространственный спектр нормированного вектора скорости $\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r})/c_0$.

Как следует из (8.28), фильтрованный фурье-образ измеренных данных состоит из спектра стационарной рефракционной неоднородности и спектра вектора скорости потока.

Чтобы разделить скалярную и «движущуюся» компоненты, применим теорию «взаимного» рассеяния к условиям рассматриваемого томографического эксперимента.

Физическое содержание этой теории заключается в «невзаимности» рассеяния на движущейся среде в противоположность «взаимности» упругого рассеяния на скалярном потенциале, т.е. скалярная теорема взаимности

$$f(k_0 \mathbf{s}^{\alpha+\vartheta}, k_0 \mathbf{s}_0^\alpha) = f(-k_0 \mathbf{s}_0^\alpha, -k_0 \mathbf{s}^{\alpha+\vartheta}) \quad (8.29)$$

не имеет силы в случае рассеяния на векторном поле.

Данная теория может рассматриваться как обобщение лучевого варианта теоремы «невзаимности»: акустический сигнал, излученный под углом θ_1 из среды, движущейся со скоростью V_1 , и прошедший в среду, движущуюся со скоростью V_2 , имеет в первой среде иную траекторию, чем сигнал, излученный под углом θ_2 из второй среды. Соотношение, описывающее рефракцию акустической волны в движущейся среде, имеет вид

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2 c_1^{-1} \sin \theta_1}{1 - (V_2 - V_1) c_1^{-1} \sin \theta_1}. \quad (8.30)$$

Если $V_2 > V_1$, то относительная скорость ΔV принимает положительное значение и, как следует из уравнения (8.30), $\theta_2 > \theta_1$. И наоборот, если $\Delta V < 0$, то $\theta_2 < \theta_1$ (рис. 8.1). Необходимо особо отметить то обстоятельство, что эффект преломления луча в данном случае не связан с изменением материальных характеристик среды, так как фактически рассматриваются два слоя одной и той же жидкости. Рефракция обусловлена исключительно относительным движением этих слоев. Обстоятельное изложение явления отражения и рефракции акустических волн для произвольного количества движущихся слоев, а также соответствующие библиографические ссылки можно найти в [3].

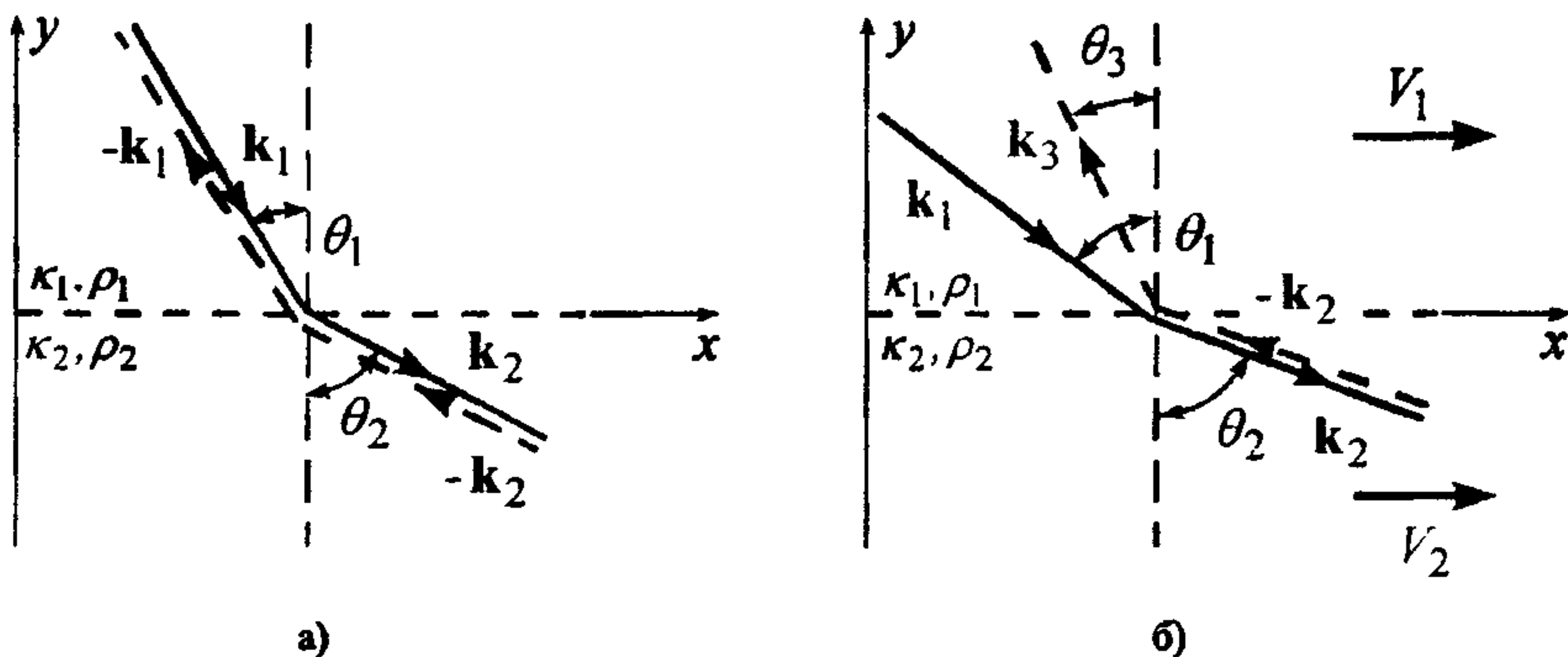


Рис. 8.1. Лучевая рефракционная взаимность в скалярном случае неподвижных сред (а) и нарушение взаимности в потоке жидкости при $V_2 > V_1$ (б) [3]

В (8.29) величина $f(k_0 s^{\alpha+\vartheta}, k_0 s_0^\alpha)$ характеризует амплитуду рассеянной волны в направлении $s^{\alpha+\vartheta}$ при падении плоской волны с направления s_0^α (см. § 5.2).

Если диссипация энергии отсутствует, обе восстанавливаемые функции в (8.28), т.е. $\epsilon(\mathbf{r})$ и $W_i(\mathbf{r})$, $i = 1, 2$, являются действительными и для их сопряженных фурье-образов выполняются равенства

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}^*(\mathbf{k}_0^\alpha - \mathbf{k}); \quad \tilde{W}_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0^\alpha) = \tilde{W}_i^*(\mathbf{k}_0^\alpha - \mathbf{k}).$$

Применяя операцию комплексного сопряжения к данным рассеяния, полученным с направления, противоположного s_0^α , будет иметь следующее выражение для измеренных спектральных данных:

$$\tilde{w}_{l_0}^*(\beta, s_0^{\alpha+\pi}) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{K}) + 2k_0^2 \{ \tilde{W}_x(\mathbf{K}) \cos \alpha + \tilde{W}_y(\mathbf{K}) \sin \alpha \}. \quad (8.31)$$

Без ограничения общности будем анализировать далее случай с $\vartheta = 0$, т.е. томографический эксперимент с согласованной приемно-излучательной системой. Тогда после суммирования фильтрованных данных, определенных уравнением (8.28) (окружность 1, рис. 8.2), и сопряженных фильтрованных данных (уравнение (8.31))

(окружность 2, рис. 8.2) имеет место соотношение вида

$$\bar{\epsilon}((\gamma - k_0) \cos \alpha + \beta \sin \alpha, (\gamma - k_0) \sin \alpha - \beta \cos \alpha) = \frac{1}{2} \bar{w}_{l_0}^S(\beta), \quad (8.32)$$

где

$$\bar{w}_{l_0}^S(\beta) = \bar{w}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) + \bar{w}_{l_0}^*(\beta, \mathbf{s}_0^{\alpha+\pi}). \quad (8.33)$$

Как следует из (8.32), усреднение модифицированных данных $w_{l_0}^S(\beta)$ устраняет компоненту в спектре рассеяния, обусловленную рассеянием на векторном поле. Это обстоятельство позволяет восстанавливать рефракционную скалярную неоднородность независимо, используя стандартные методы решения обратной задачи рас-

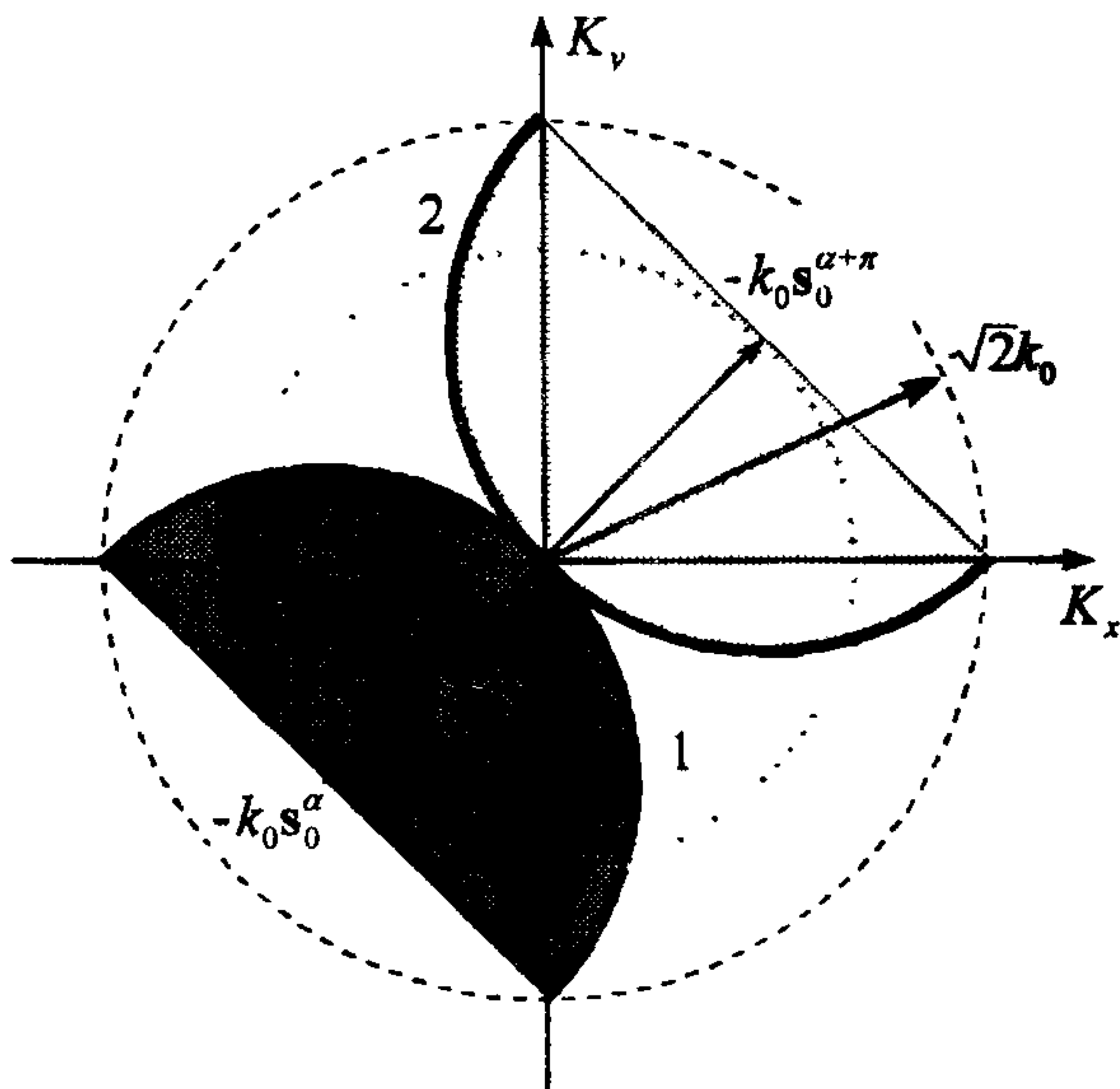


Рис. 8.2. Структура данных в пространстве Фурье для двух томографических измерений. Окружность 1 соответствует просветным амплитудам рассеяния для случая, когда облучение исследуемой области производится с направления \mathbf{s}_0^α . Окружность 2 характеризует аналогичные данные, полученные при облучении с противоположного направления $\mathbf{s}_0^{\alpha+\pi}$.

сеяния, в частности, применением алгоритмов дифракционной томографии.

Взяв разность $\tilde{w}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha)$ и $\tilde{w}_{l_0}^*(\beta, \mathbf{s}_0^{\alpha+\pi})$, будем иметь

$$\tilde{w}_{l_0}^D(\beta) = \tilde{w}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha) - \tilde{w}_{l_0}^*(\beta, \mathbf{s}_0^{\alpha+\pi}). \quad (8.34)$$

Тогда выражение для компонент вектора скорости имеет вид

$$\tilde{w}_{l_0}^D(\beta) = -4k_0^2 \{ \tilde{W}_x(\mathbf{K}) \cos \alpha + \tilde{W}_y(\mathbf{K}) \sin \alpha \}. \quad (8.35)$$

Использование соотношений (8.32) и (8.35) решает задачу разделения скалярной и «движущейся» компонент неоднородного потока. Остающаяся задача - восстановление $\tilde{W}_x(\mathbf{K})$ и $\tilde{W}_y(\mathbf{K})$ из дифференциальных данных $\tilde{w}_{l_0}^D(\beta)$.

8.4. Полная реконструкция поля скоростей в дифракционной томографии

Структура исходных томографических данных такова, что для фиксированной частоты первичного поля каждая точка области пространственных частот соответствует двум окружностям данных, отвечающим различным направлениям облучения (рис. 8.3). С точки зрения обратной задачи рассеяния для двух томографических экспериментов, характеризуемых направлениями сканирования $\mathbf{s}_0^{\alpha_1}$ и $\mathbf{s}_0^{\alpha_2}$, регистрируются две точки пересечения соответствующих поверхностей Эвальда, а именно, $|\mathbf{K}| = k_0$. В случае скалярного потенциала значения амплитуд рассеяния, как это следует из теоремы взаимности, являются одинаковыми для каждой фиксированной точки. В случае движущейся среды «невзаимность» рассеяния звуковой волны потоком предоставляет дополнительную информацию, которая может быть использована для разделения спектральных компонент вектора скорости $\tilde{W}_x(\mathbf{K})$ и $\tilde{W}_y(\mathbf{K})$, т.е. оказывается возможным произвести полную реконструкцию поля скоростей произвольного потока.

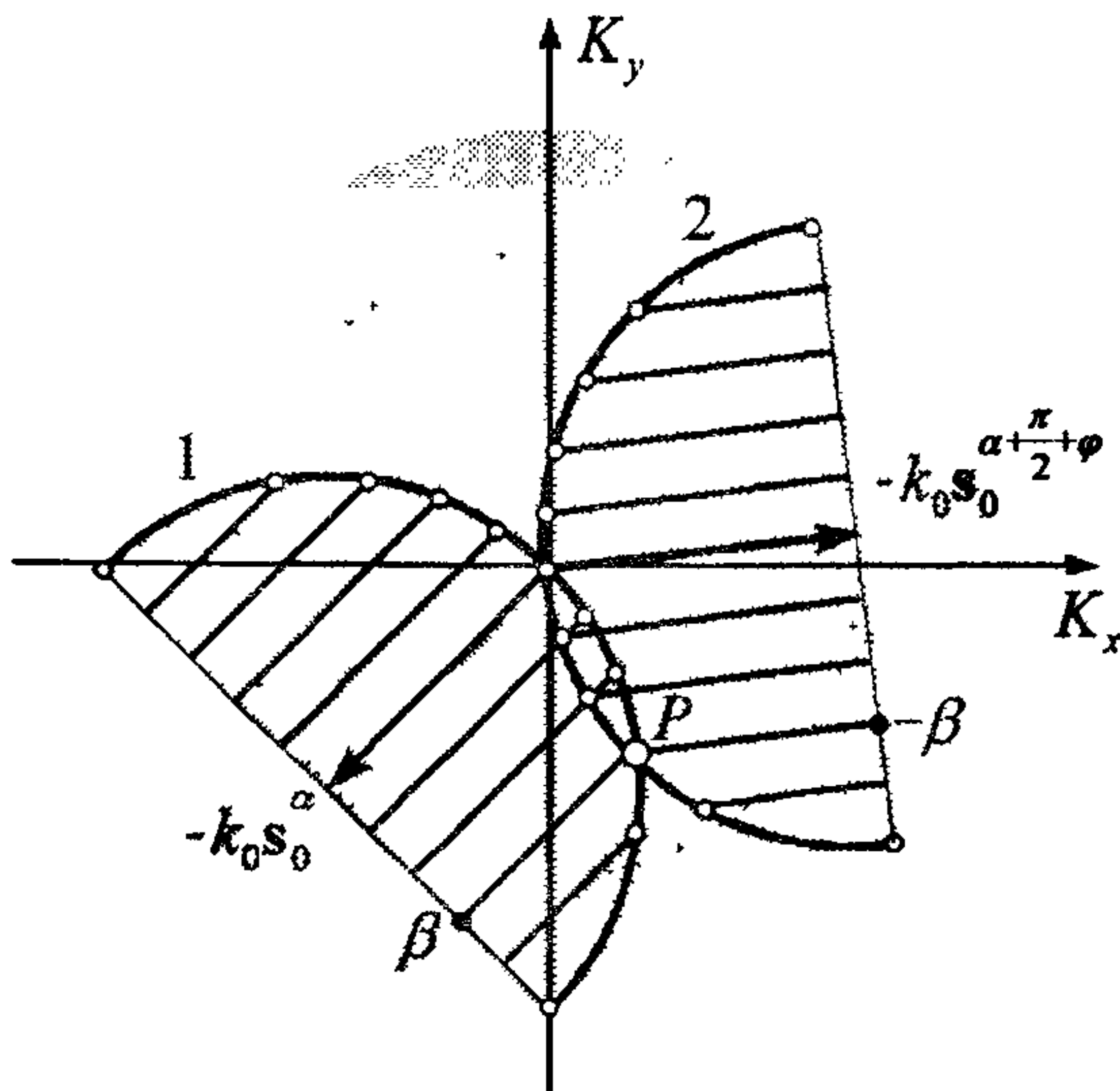


Рис 8.3. Для каждой произвольной точки P внутри информационного круга (заштрихованная область) в фурье-пространстве и каждой спектральной координаты β могут быть организованы два измерительных эксперимента, таких что точка пересечения измерительных окружностей, соответствующих этим измерениям, совпадет с P

Для фиксированного направления сканирования \mathbf{s}_0^α и фиксированной спектральной координаты β (окружность 1, рис. 8.4) значения $\tilde{W}_x(\mathbf{K})$ и $\tilde{W}_y(\mathbf{K})$ можно оценить с помощью (8.35) и дополнительного соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{l_0}^D(-\beta) = & -4k_0^2 \{ \tilde{W}_x(\mathbf{K}) \cos(\alpha + \pi/2 + \varphi) + \\ & + \tilde{W}_y(\mathbf{K}) \sin(\alpha + \pi/2 + \varphi) \}, \end{aligned} \quad (8.36)$$

где $\varphi = \arccos(\beta/k_0)$ (окружность 3, рис. 8.4). Умножив (8.35) на $\cos(\alpha + \varphi)$ и (8.36) на $\sin(\alpha)$ и вычислив разность полученных выражений, будем иметь

$$\tilde{W}_x(\mathbf{K}) = -\frac{1}{4k_0^2 \cos \varphi} (\tilde{w}_{l_0}^D(\beta) \cos(\alpha + \varphi) + \tilde{w}_{l_0}^D(-\beta) \sin(\alpha)). \quad (8.37)$$

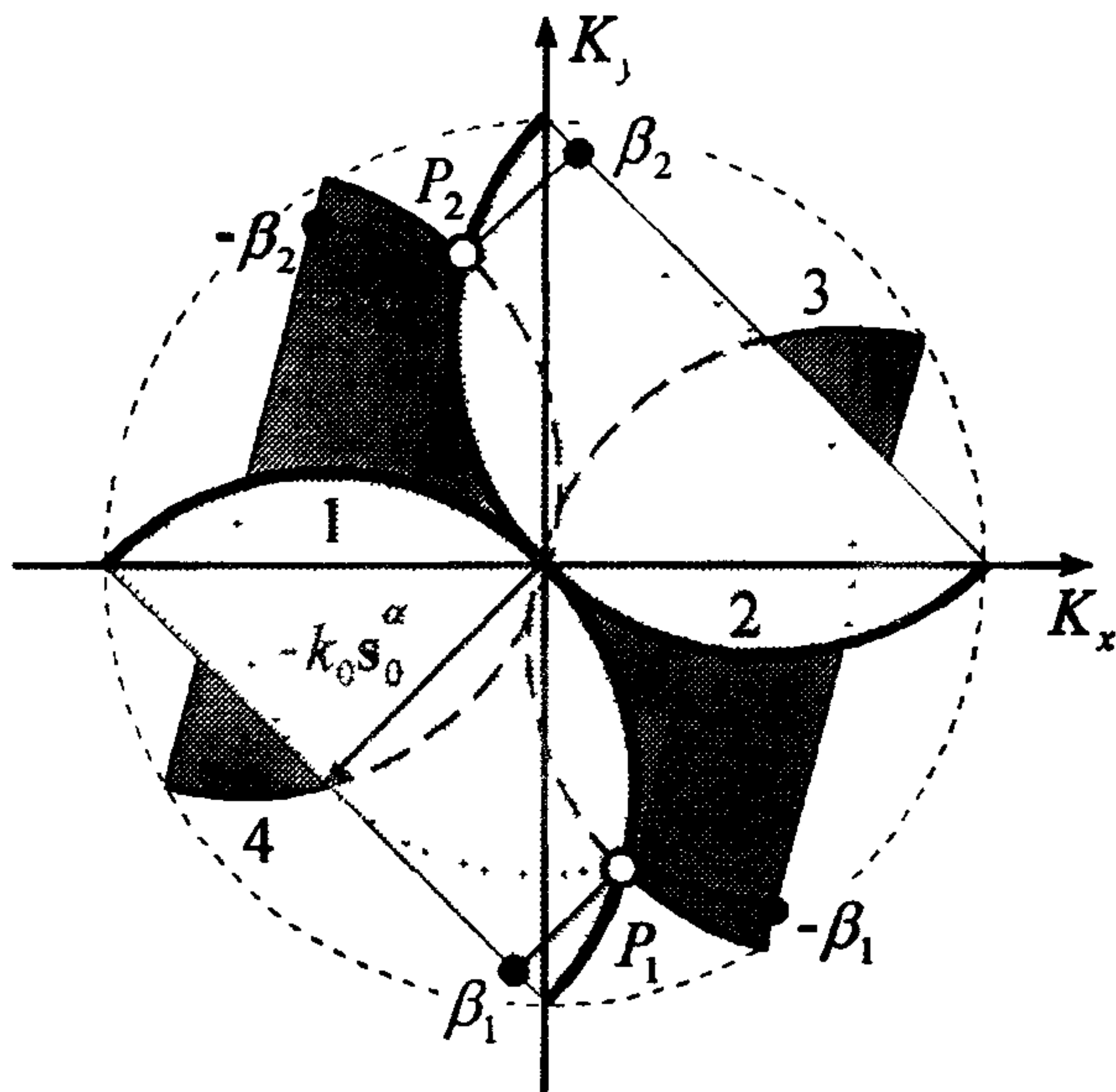


Рис. 8.4. Дифракционная томография позволяет получать низкочастотную версию спектральных характеристик скалярной неоднородности $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$ и вектора скорости $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{K})$ внутри информационного круга с радиусом $\sqrt{2}k_0$ в пространстве Фурье. Для отдельной оценки скалярной и векторной компонент, а также для реконструкции компонент вектора скорости $\tilde{V}_x(K_x, K_y)$ и $\tilde{V}_y(K_x, K_y)$ в двух точках P_1 и P_2 в пространстве Фурье необходимо произвести четыре типа измерений.

Умножив (8.35) на $\sin(\alpha + \varphi)$ и (8.36) на $\cos(\alpha)$ и просуммировав их, получим

$$\tilde{W}_y(\mathbf{K}) = -\frac{1}{4k_0^2 \cos \varphi} (\tilde{w}_{l_0}^D(\beta) \sin(\alpha + \varphi) + \tilde{w}_{l_0}^D(-\beta) \cos(\alpha)). \quad (8.38)$$

Как следует из (8.37) и (8.38), для формирования оценок $\tilde{W}_x(\mathbf{K})$ и $\tilde{W}_y(\mathbf{K})$, а также $\tilde{V}_x(\mathbf{K})$ и $\tilde{V}_y(\mathbf{K})$ в двух точках пространства Фурье необходимо провести четыре независимых эксперимента, а именно:

- поток облучается с направления \mathbf{s}_0^α и производится съём данных $\tilde{w}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^\alpha)$ (окружность 1, рис. 8.4);

- производится съём данных $\tilde{w}_{l_0}(\beta, \mathbf{s}_0^{\alpha+\pi})$ с противоположного направления $\mathbf{s}_0^{\alpha+\pi}$ с их последующим сопряжением (окружность 2, рис. 8.4);

- среда сканируется с направления $\mathbf{s}_0^{\alpha+\frac{\pi}{2}+\varphi}$ (окружность 3, рис. 8.4);

- повторяется сканирование с направления $\mathbf{s}_0^{\alpha-\frac{\pi}{2}+\varphi}$ (окружность 4, рис. 8.4).

Соответствующая комбинация полученных таким образом данных обеспечивает определение низкочастотных компонент спектра поля векторов скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$.

Заметим, что потенциальная компонента вектора скорости потока может быть также однозначно определена на основе измерений скоростей потока на границе области наблюдения при выполнении условия $\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0$.

Литература

- [1] *Акустоскопия. Тематический выпуск // ТИИЭР.* - 1979. - Т. 67 (4).
- [2] Блохинцев Д.И. *Акустика неоднородной движущейся среды.* - М.: Наука, 1981. - 206 с.
- [3] Бреховских Л.М., Годин О.А. *Акустика слоистых сред.* - М.: Наука, 1989. - 416 с.
- [4] Василенко Г.И., Тараторин А.М. *Восстановление изображений.* - М.: Радио и связь, 1986. - 304 с.
- [5] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн.* - М.: Наука, 1979. - 383 с.
- [6] Горюнов А.А., Сасковец А.В. *Обратные задачи рассеяния в акустике.* - М.: Изд-во Московского университета, 1989. - 152 с.
- [7] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* - 5-е изд. - М.: Наука, 1971. - 1108 с.
- [8] Грегуш П. *Звуковидение.* - М.: Мир, 1982. - 232 с.
- [9] Гринлиф Дж. Ф. *Ультразвуковая реконструктивная томография // ТИИЭР.* - 1983. - Т. 71. - С. 54 - 63.
- [10] Домаркас В.И., Пилецкас Э.Л. *Ультразвуковая эхо-скопия.* - М.: Машиностроение, 1988. - 275 с.

- [11] Кравчук А.С. *Вычислительная томография*. - М.: Изд-во Московской госакадемии приборостроения и информатики, 1996. - 140 с.
- [12] Красильников В.А, Крылов В.В. *Введение в физическую акустику*. - М.: Наука, 1984.
- [13] Крылов В.В. *Основы теории излучения и рассеяния звука*. - М.: Изд-во Московского университета, 1989. - 118 с.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика сплошных сред*. - М.: Гостехиздат, 1953. - 788 с.
- [15] Лисовец Ю.П., Ревякин А.М., Рычагов М.Н., Терещенко С.А. *Применение пакета MATLAB в лабораторном компьютерном практикуме*. - М.: МИЭТ, 1998. - 96 с.
- [16] Мюллер Р.К., Кавех М., Уэйд Г. Реконструктивная томография и ее применение в ультразвуковой технике // ТИИЭР. - 1979. - Т. 67. - С. 146 - 170.
- [17] *Применение ультразвука в медицине. Физические основы*. / Под ред. К. Хилла. - М.: Мир, 1989. - 567 с.
- [18] Прэтт У. *Цифровая обработка изображений*. - М.: Мир, 1972. - Т. 2. - 792 с.
- [19] Терещенко С.А. *Вычислительная томография*. - М.: МИЭТ, 1995. - 76 с.
- [20] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. - М.: Наука, 1979. - 285 с.
- [21] *Ультразвуковая диагностика. Основы, методика и техника исследований* / Под ред. А.Н. Кишковского. - СПб.: ТОО «Гиппократ», 1996. - 59 с.
- [22] *Физика визуализации изображений в медицине* / Под ред. С. Уэбба. - М.: Мир, 1991. - Т. 1. - 407 с.; Т. 2. - 406 с.

- [23] Хермен Г. *Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии.* - М.: Мир, 1983. - 349 с.
- [24] *Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik: Grundlagen und technische Lösungen* / Hrsg. E. Krestel. - Berlin - München: Siemens Aktienges., 1988. - 627 p.
- [25] *Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik* / Hrsg. H. Morneburg. - München: Publicis-MCD-Verlag, 1995. - 708 p.
- [26] Hussey M. *Diagnostic ultrasound.* - London: Blackie and Son, 1975. - 254 p.
- [27] *Imaging techniques in biology and medicine* // Ed.: C.E. Swenberg and J.J. Conklin. - N.-Y.: Academic Press, 1988. - 369 p.
- [28] Kak A.C., Slaney M. *Principles of computerized tomographic imaging.* - N.-Y.: IEEE Press, 1988. - 329 p.
- [29] Macovski A. *Medical imaging systems.* - N.J.: Prentice-Hall, 1983. - 256 p.
- [30] McDicken W.N. *Diagnostic ultrasonics: principles and use of instruments.* - Edinburgh: Churchill Livingstone, 1991. - 367 p.
- [31] Morse P.M., Ingard K.U. *Theoretical acoustics.* - N.-Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968. - 927 p.
- [32] *Ultrasonic Instruments & Devices* // Ed.: E.P. Papadakis. - N.-Y.: Academic Press, 1999. - 809 p.

Оглавление

Введение	3
1. Применение ультразвука в биомедицинских исследованиях. Основные сведения	5
1.1. Место ультразвука в медицинской визуализации . . .	5
1.2. Практика и уровни облучения	7
1.3. Акустические характеристики биологических структур	9
2. Физические основы медицинского ультразвука	12
2.1. Распространение звука в жидкостно-подобных средах	12
2.2. Отражение и преломление на импедансных границах .	16
2.3. Рассеяние УЗ волн	20
2.4. Поглощение УЗ волн	22
3. Генерация и регистрация УЗ волн	24
3.1. Пьезоэлектрический эффект	24
3.2. Модель излучателя и его конструктивная реализация	26
3.3. Методы электронного сканирования и фокусировки	30
4. В-сканирование	33
4.1. Формирование ультразвуковых изображений	33
4.2. Метод В-сканирования	36
4.3. Разрешающая способность при В-сканировании	41
5. Волновая акустическая томография. Линеаризованный вариант	45
5.1. Проекционные соотношения дифракционной томографии	45
5.2. Структура спектральных томографических данных: проекционный подход	54

5.3.	Структура спектральных томографических данных: T-матричный подход	58
5.4.	Согласование сеток дискретизации исходных данных и пространственного спектра неоднородности	66
5.5.	Прямая фурье-реконструкция	81
5.6.	Численное моделирование в акустической томографии	83
6.	Учет многократных рассеяний в акустических обрат- ных задачах томографического типа	94
6.1.	Итерационная процедура реконструкции контрастных неоднородностей в пространстве Фурье	94
6.2.	Применимость модели	105
7.	Лучевая акустическая томография квазистационар- ных течений	108
7.1.	Общие сведения	108
7.2.	Времяпролетные томографические измерения потоков и проекционные соотношения	109
7.3.	Раздельное отображение скалярной и «движущейся» компонент	112
7.4.	Реконструкция векторного поля интерполяцией в про- странстве Фурье	113
8.	Дифракционная акустическая томография движу- щейся среды	120
8.1.	Дифференциальные уравнения акустики неоднород- ной движущейся среды	120
8.2.	Дифракционная томографическая фурье-теорема для вихревых потоков	123
8.3.	Разделение скалярной и векторной компонент	128
8.4.	Полная реконструкция поля скоростей в дифракцион- ной томографии	132
	Литература	136